Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984 | 1985
juni | juli

Euclides 10

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Rondom de evenredigheid

Jan Karel Timmer

In de eerste versie van dit artikel stond de evenredigheid al niet meer centraal. De hoofdredactie van Euclides maakte opmerkingen, die een tweede versie tot gevolg hadden en mijn zoon Jan bracht mij ertoe deze derde te schrijven. Het zwaartepunt van het artikel ligt nu op drie didactische principes, over plaats, wending en achtergrond, die zich in de evenredigheid lieten illustreren. Dienovereenkomstig zijn historische en taalkundige opmerkingen als achtergrond bedoeld.

1 Inconsequentie en meerduidigheid

Men vindt het prakt*isch* dagel*ijks* in de taal. Meerduidigheid klank-teken doet mij wensen dat au en ij *gouw* mogen verd*wein*en. De delen van de wiskunde, die dicht bij de lagere school liggen, worden gemakkelijk door fouten van deze soort aangetast. Een winkelier schreef eens, dat hij tussen 1 + 2 gesloten was. Op de hbs leerden we meer scherpte. De som van 1 en 2 was niet 3, maar 1 + 2; de *uitkomst* was 3. In Frankrijk maakte men verschil tussen 'somme' en 'somme effectuée', mogelijk zou 'somme inachevée' tegenover 'somme achevée' het onderscheid nog scherper benadrukken. Uitdrukkelijk verboden was $1 + 2 = 3 + 4 = 7$, wat mij later als leraar op het idee bracht, de *transitiviteit* te noemen, tegen de *achtergrond* van niet transitieve relaties. De verwarring van 'is' met '=' kan een goede wiskundige parten spelen, als hij zegt, dat een determinant een getal *is*. Wij, leerlingen, hoorden dat de tweede term van $a - b + c$ niet b was, maar $-b$, want termen waren bestanddelen van een som. Toch kregen we later de *termen* a, b, c en d van de *ééndimensionaal* geschreven evenredigheid $a:b = c:d$ te verteren. Het middenteken luidde 'als', dat was uitspraak nummer drie. Buiten en nu ook in ons vak betekent de dubbele punt 'en wel, te weten, namelijk', in de lagere school betekende het een deling en als derde betekenis kwam er 'staat tot' bij. Wijlen Dr. P. Jansen, kweekschooldirecteur en grasspecialist, drukte met het werkwoord 'staattotteren' zijn misnoegen over deze overvloed uit.
Voor de deling bestaan de breukstreep in drie verschillende standen (de aflopende vroeger op de Amsterdamse tram) en de lagere-schooltekens : en ÷ (Engels), vijf stuks! Een lichtpunt is, dat de evenredigheid ook *tweedimensionaal* te schrijven is als $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maar met ingrijpende veranderingen is gauw een halve eeuw gemoeid!

Niemand zal trachten een taal vrij te maken van synoniemen en homoniemen, maar binnen de wiskunde is er verbetering gaande. Omstreeks 1900 kon men nog leren, dat worteltrekking twee waarden opleverde, een opvatting, waartegen in 1930 nog gevochten moest worden. De tijd, dat iedere functie eenwaardig werd verklaard, ligt niet zo ver achter ons. Verbanning van inconsequentie en meerduidigheid uit de *wiskunde*taal kan ons vak alleen maar ten goede komen en mogelijk leiden tot meer aandacht voor en belangstelling in de *samenhang* der onderdelen; kan anderszijds duidelijker *onderscheiding* geven.
In het lager onderwijs kan het verband tussen deling en breuk verstevigd worden door de : als deelteken af te schaffen, wat ruim 30 jaar geleden al op een CIEM-conferentie door een Fransman werd voorgesteld. Bij de worteltrekking kregen we twee aparte definities voor n even of oneven. Deze zijn aldus samen te vatten:
De n-de wortel uit a is het grootste getal, waarvan de n-de macht gelijk is aan a.
Ik meen, dat de doorsnee-leerling niet in staat is, uit het tot dusverre gebruikelijke wiskunde-onderwijs de daarin gangbare denkwijzen te destilleren, reden, waarom ik zou wensen, dat zekere denksystemen en -hulpmiddelen expliciet tot de leerstof behoorden, immers:
Wiskundige denksystemen zijn bruikbaar tot ver buiten de grenzen van ons vak en het onderwijs daarin zou daarom de belangstelling van de leerlingen kunnen vergroten.

2 Het plaatsprincipe

Een didactiek, die bestaat uit praten-luisteren, of uit schrijven-lezen, beperkt zich, door het tijdsbegrip gedwongen, tot één dimensie, er is *volgorde*. Inschakeling van de plaats geeft dimensiewinst en verruimt de volgorde tot *ordening*. Onze uitspraak van 281 met voorrang van 1 boven 8 is een plaats-tijdconflict, een energieverslindend ongerief in slechts weinig talen. Onjuiste volgorde is didactisch nadelig. Daarom heb ik op de LO-cursus bij behandeling van de reststelling de gehele rationale algebraïsche functie ook 'fonction algébrique rationnelle entière' genoemd.

Een groot schoolbord biedt de gelegenheid plaatsgebonden les te geven: Behandeling midden, klad, dat stoort op de linker flap en samenvatting van hoofdzaken op de rechter flap. Het kiezen van de beste plaats is niet altijd eenvoudig. De typiste en de schaker verdelen hun gedachten over een tweedimensionaal bord, de wiskundige denke aan matrix en determinant, aan driehoek van Pascal, aan planimetrie en stereometrie. Goniometrische formules kunnen, met die voor $\cos(a - b)$ in het midden, zo op papier verspreid staan, dat de samenhangende buren zijn. Steeds gaat het er om, zich te ontworstelen aan een volgorde, om tot een ordening te geraken, die het overbrengen van gedachten vereenvoudigt door complicatie. Ik zou het plaatsprincipe aldus willen formuleren:

De plaats, waarmee we onze gedachten verbinden, kan een positieve invloed hebben op de verwerking daarvan (begrijpen, uitleggen, onthouden).

Voorbeelden van dit didactische principe zijn o.a. het in de serie 'Met Passer en Liniaal' (Bijpost en Timmer) geplaatste schema voor transitiviteit, schema's in het algemeen, het T-schema voor vergelijking van twee objecten, punten van overeenkomst bovenaan, streep er onder, dan verticale streep over het midden (de T), tegenstellingen links en rechts ervan.

$$\begin{array}{lccc} & a = b & & \\ & & b = c & \\ \text{dus } & a & = & c \end{array}$$

M	W	L
V	D	
O	A	

Verder het schema van bewerkingen, de rechtstreekse links, de inversen rechts. Het illustreert hun samenhang, is bruikbaar bij de logaritmenbehandeling en laat zien, dat vier bewerkingen binnen het schema distributief zijn t.o.v. elke andere, die er één plaats recht of schuin onder staat. Welke bewerkingen zijn herhaling van een andere? Bij de lessen, vooral die over logaritmen, noemde ik dit schema het *degradatieschema*.

3 Kruissomstructuur

De overgang van $a - b = c - d$ naar $a - c = b - d$ deden we vroeger met de zogenaamde tekenregel.

53	20
51	18

Bovenstaand getalschema geeft in dit geval een vereenvoudiging. Er zijn, gezien de titel, twee sommen van 71 in verborgen en een stel verschillen, van 2 en van 33. Wat doen we ermee? Nog niet zo vreselijk lang geleden heb ik er voor een lagereschoolklas een leuke hoofdrekenles mee gegeven. Uitgestrekte handen voor de klas, vingers horizontaal, rechterhand flink hoger dan de linker. Mijn getallenrechthoek was een parallellogram geworden. Hoeveel is 51 (rechterhand) min 18 (linkerhand)? Toen gingen mijn handen met kleine schokjes eerst 1 omhoog, en nog eens. Zo vonden de kinderen 52 − 19 en 53 − 20 = 33. Ik had er ook nog een verhaaltje over twee ladders bij kunnen fantaseren.

Veel verder terug in de tijd vonden we in ons meetkundeboek verspreid iets, dat ook deze kruissomstructuur vertoonde, zonder dat we hierop opmerkzaam werden gemaakt:

a In een raaklijnenvierhoek zijn de sommen der overstaande zijden gelijk.
b In een koordenvierhoek zijn de sommen der overstaande hoeken 180° (ook twee gelijke sommen van elementen, die 'kruisgewijs' in de figuur voorkomen).
c In een cirkel met twee loodrecht snijdende koorden zijn de sommen van overstaande bogen gelijk.
d In een vierhoek met onderling loodrechte diagonalen (orthogram) zijn de sommen van de kwadraten der overstaande zijden gelijk.
e Is $ABCD$ een rechthoek en P een willekeurig punt, dan is $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.
Bij alle gelijke 'kruissommen' passen gelijke 'rechte verschillen'. Dat is bruikbaar bij het bewijs van de omkering van a.
Specialiseert men d tot de figuur van een driehoek met één hoogtelijn, dan leveren de kwadraatverschillen het eenvoudigste middel om uit de zijden van een driehoek de hoogtelijn en de oppervlakte te berekenen. Bovendien geven verzamelingen van punten, die met constante kwadraatverschillen samenhangen, een vrij onbekende weg naar de hoogtelijnconcurrentie.

4 Het reversibiliteitsprincipe

Een gedachte kan uitgedrukt worden in een volzin, een figuur, een formule of anders. Als ik de Zwitser Piaget goed begrepen heb, dan beschouwt hij het vermogen van de mens, snel een gedachte in een andere vorm te gieten, als een facet van zijn intelligentie. Men kan hiertoe ook het omwerken van formules rekenen. In 'Algebra UTS' (Sloot en Timmer) stond een apart hoofdstuk hierover. Als voorbeeld: Bij het overnemen van een klas bleek mij, dat de leerlingen wel de stelling van Pythagoras kenden, maar dat ze van $a^2 + b^2 = c^2$ niet konden komen tot $a^2 = (c - b)(c + b)$. Bij zeker rekenwerk werden dan omwegen gemaakt. Verwant aan de hier ontwikkelde gedachte is het formuleren van de omkering(en) van een redenering, afgezien van de juistheid ervan. Piaget noemt deze gedachten *reversibel*. Ik zou willen formuleren:
De bruikbaarheid van een gedachte wordt groter, naarmate deze in een grotere verscheidenheid van vormen optreedt.

Een van de meest veelzijdige voorbeelden van reversibiliteit geeft het getallenvierkant aan het begin van §3. We kunnen in elk 'hoekpunt' beginnen en daar twee richtingen volgen, dat geeft 8 manieren om de gelijkheid van twee verschillen te noteren. Men ontdekt ook 8 manieren om de gelijkheid van twee sommen op te schrijven. De overgang van som naar verschil en omgekeerd wordt door het plaatsprincipe uiterst gemakkelijk gemaakt. Op vele manieren voldoet dit schema aan de hier gegeven omschrijving van reversibiliteit. Bovendien kunnen we het telkens 90° draaien en omkeren, na welke opmerking het ook voldoet aan de *taalkundige* betekenis van reversibel, wendbaar. Reversibiliteit is te beschouwen als een *interne aangelegenheid* van sterk samenhangende elementen, waaruit men wisselende deelverzamelingen kiest, die in wisselende volgorde of ordening geplaatst kunnen worden.
Dit is toepasbaar op herhaling van leerstof. In mijn 'Compendium der schoolwiskunde' kon de algebra gerepeteerd worden naar opklimmende complicatie van bewerkingen of, toen moderner, van getallensoorten.

Een tamelijk verborgen toepassing van de reversibiliteit is de omzetting van de formule $H + Z = R + 2$ voor Eulerse veelvlakken in $1 - H + R - Z + 1 = 0$. Consequente beperking en uitbreiding van de aldus gewijzigde formule plaatst de anders zo geïsoleerde stelling van Euler tegen de *achtergrond* van soortgelijke verbanden in lagere en hogere dimensies. Het getal 2 komt dan alleen in de oneven dimensies voor. Zo voert de reversibiliteit ons tot

5 Generalisatie en specialisatie

Deze zijn een facet van ons denken, dat past onder het slot van §1. Wij, leerlingen kregen dit voor het eerst *stilzwijgend* in het hoofdstuk 'Bijzondere vierhoeken'. Toen vonden sommigen van ons het merkwaardig, zelfs jammer, dat het arme vierkant geen enkele 'nieuwe' eigenschap had, iets, dat het echt van zichzelf had. Niemand dacht aan zelfcongruentie.
Veel later viel mij op, hoe vaak kandidaten wiskunde LO bij het didactische deel van hun examen het

parallellogram-met-specialiteiten als onderwerp hadden gekozen. Of zouden hun *opleiders* de structuur van dit hoofdstuk belangrijker gevonden hebben dan de moleculen ervan? Nu – te laat – heb ik spijt, geen enkele kandidaat ooit in die richting gevraagd te hebben.

Dr. B. P. Haalmeijer vond genoemde structuur belangrijk genoeg, om in zijn meetkundeboek (1936, blz. 87) de samenhang van enige vierhoeken met een Venn-diagram aan te geven, met vraagstukken daarover op blz. 94.

parallellogram
rechthoek ruit
vierkant

Een ander daartoe geschikt systeem noem ik *afdalende structuur*. Deze geeft de indruk van een *tralie*, met dat nuanceverschil, dat, zoals hierboven, rechthoek en ruit op gelijke hoogte komen, omdat beide één bijzonderheid vertonen. Afdalende structuur, eventueel genoteerd op een cilindermantel, is toe te passen als het Venn-diagram ons in de steek laat.

In 'Meetkunde UTS' (Sloot en Timmer) werd gevraagd naar het aantal soorten figuren met een punt, een rechte en een cirkel. Onderaan in de structuur is het punt dan raakpunt. In hoofdstuk V van mijn 'Planimetrie' is de afdalende structuur toegepast op de transformaties, die bij Wiskunde LO optraden en bij de MOA-stof kon de lineaire transformatie met matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zo genoteerd worden met de identiteit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ op de onderste regel.

Toen ik voor een gymnasiumklas eens de parallellogramkwestie zowel met Venn als met afdaling had laten zien, vroeg ik naar voorkeur m.b.t. beide systemen. Het antwoord verraste mij: Allebei! Je zou bijna zeggen, dat die kinderen het reversibiliteitsbeginsel kenden.

De mens heeft meer neiging tot generalisatie dan tot specialisatie. *De eenvoudigste zaken worden gemakkelijk over het hoofd gezien.* Wij, leerlingen, ontmoetten symmetrie vaker bij biologie dan bij wiskunde. Als zelfbeschuldiging: in 'Met Passer en Liniaal' werd de zelfcongruentie wel met letters in de opgaven genoemd, maar niet in de tekst verwoord.

Men generaliseert licht ten onrechte, een te ver doorgevoerde inductie, die werkt als een olievlek. Toen één van onze kinderen een muis in de keuken zag, was de reactie: 'Mama, foppo', waarmee vogeltje bedoeld was. Ikzelf had als student moeite met het begrip: 'conservatief krachtveld'. In beide gevallen ontbrak een *tegenvoorbeeld als achtergrond.*

Bij een vermenigvuldigles met de pantograaf (derde klas gymnasium) vroeg iemand, wat er zou gebeuren, als het instrument verkeerd gemonteerd werd. We deden het en de straklijnige paddestoel, die we vergroot hadden, kwam toen veel vlotter, natuurlijker te voorschijn!

In de serie: dwaas-fout-redelijk-goed-ideaal kunnen we iedere situatie zien tegen de *achtergrond* van een minder goede, om het betere meer te waarderen en beter te begrijpen. Zelfs een dwaas idee kan een gezonde gedachte doen ontstaan. Historisch voorbeeld: Een verankerd schip, waartegen een mijn dreigde te botsen. 'Allemaal blazen', riep een matroos. Toen kon de brandspuit het gevaar bezweren.

6 Het structuurprincipe

Bij inductief denken eist ieder nieuw begrip een schaal van voorbeelden, lopend van simpel tot gecompliceerd, afgesloten door een non-voorbeeld. Pas daarna kan men verwachten dat een definitie begrepen zal worden. Daarom is in het voorgaande het woord 'achtergrond' herhaaldelijk gebruikt.

Hier is dan een derde didactisch principe:

Een begrip of gedachtengang kan verhelderend worden door specialisaties, generalisaties en achtergronden.

Zo heb ik wel gevraagd naar het *aller*eenvoudigste voorbeeld van twee strijdige vergelijkingen in x en y en dan kwam $\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ op het bord. Als eenvoudigste stelsel van 'drie met drie' werd dan genoteerd

$$\left.\begin{array}{r} x=1 \\ x+y=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\} \text{ of iets dergelijks.}$$

De naam 'pyramidaal stelsel' werd genoemd en daarbij paste en passant de vraag naar de eenvoudigste pyramide, eventueel zelfs met definities. Leerlingen vinden over het algemeen zulke uitstapjes wel aardig, bovendien waarderen ze later de ontdekking, dat ze bepaalde zaken al eerder 'gehad' hebben.

Vooral in oudere boeken staan soms omslachtige definities van pyramide. De eenvoudigste zijn bovendien dualiseerbaar: Een pyramide is een veelvlak, waarvan (nu volgen drie voortzettingen)

a alle hoekpunten op één na in een plat vlak liggen
b alle zijvlakken op één na door een punt gaan
c de helft der ribben door een punt gaat en de andere in een vlak liggen.

Algebra wordt verhelderd door getallenvoorbeelden. Je kunt er zelfs een afdalende structuur mee maken, zoals in dit voorbeeld:

$$\begin{array}{ccc} & a^2 - b^2 = & \\ 7^2 - b^2 = & & a^2 - 3^2 = \\ & 7^2 - 3^2 = & \end{array}$$

Toch heb ik eens een middenklas overgenomen, waarin een jongen verklaarde, dat hij niet wist, dat letters getallen voorstelden.
Bij sommige lessen is generalisatie van driehoek tot boldriehoek (met 1/8 appel?) nuttig. Honderd km noordwaarts en honderd km oostwaarts is een prachtige achtergrond voor de commutativiteit. De kwestie is, dat elke leerling, die denkt dat alles commutatief is, zich niet meer daarvoor interesseert.
Ook de vraagstukjes van §3 vragen om structuur. Bij a en b kan – met de vinger der voorzichtigheid – iets over dualiteit gezegd worden, enigszins nonvoorbeeld. Daartoe heb ik soms een Oosterling ten tonele gevoerd, die de woorden punt en rechte verwisselde en ook verbinden en snijden. Ruimtelijke uitbreiding vragen d en e en alle vijf vragen ze (reversibiliteit) om een omkering. Om de ruimtelijke omkering van e te bewijzen kan men P specialiseren in A, in B, C en D. Ten slotte: Als we d en e uitbreiden tot een tegelvloer, dan ontdekken we dat ze twee verschillende presentaties van eenzelfde vraagstuk zijn.

7 Structuurwisseling

Bij specialisatie is de bedoeling terug te keren naar het uitgangspunt, b.v. als we de planimetrie te hulp roepen om een stereometrisch probleem op te lossen. Bij generalisatie geschiedt hetzelfde, maar in omgekeerde richting.
Bij structuurwisseling treden *twee verschillende generalisaties* op. In tegenstelling tot de reversibiliteit heeft de structuurwisseling een *extern* karakter. We kunnen eenzelfde vlakke figuur soms op uiteenlopende wijzen zien als projectie van een ruimtefiguur. Het overbekende voorbeeld is de trapfiguur, die na enig ingespannen turen van betekenis verspringt. In de regelmatige twaalfhoek gaan de diagonalen 1-5, 2-7 en 3-10 door een punt. Ziet u ze als bissectrices van driehoek 1-3-7 of als hoogtelijnen van driehoek 2-5-10? Zie omkering van c, §3.

Uit drie vergelijkingen van het type $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ kan men handig x en y elimineren door ze op te vatten als eerstegraads vergelijkingen in x^2, xy en y^2. Soms kan een vorm met voordeel symmetrisch of homogeen gemaakt worden door substitutie.
Het slotvoorbeeld van §6 is geen structuurwisseling, in die tegelvloer ziet men *twee verschillende specialisaties*. Laten we deze tegenhanger van structuurwisseling maar tot de *transformaties* rekenen. Een ander non-voorbeeld van structuurwisseling zal men vinden in §14.
Een bekende oplossingsstrategie bestaat uit:

a Transformatie van een probleem,
b oplossing van het probleem in een nieuw veld en
c interpretatie van de oplossing in het oude veld.

Voorbeelden van deze *driedelige structuur* zijn de wissels algebra-rekenen, meetkunde-algebra, getal-logaritme, berekening-constructie, stereometrie-planimetrie, figuur-inverse figuur. Geen leraar of boek heeft mij ooit gewezen op het gemeenschappelijke van dit alles en ik zelf heb dit helaas nooit eerder gedaan, noch in woord, noch in geschrift.

8 Een leservaring

Omstreeks begin 1949 had ik op de Amsterdamse Weesperzijde enige onderwijzers, die vóor Wiskun-

de LO bezig waren. Op het bord verscheen:

$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\cos x}{3}$$

en daarachter: tg x (nu tan x) = 2/3.
Toen kwam de vraag, hoe ik dat zo gauw zag. De vrager wilde vermenigvuldigen met 6, dan delen door cos x, enz. Die weg had ik niet gevolgd, maar ik kon geen afdoende antwoord vinden. Later besefte ik, dat ik alleen het blok

$$\frac{\sin x}{2} \quad \frac{\cos x}{3}$$

had gezien. Mogelijk is toen het plaatsprincipe vaag bij me opgekomen; het reversibiliteitsprincipe kende ik toen nog niet. In een volgende les gebruikte ik het woord 'verhoudingsblok' en later vertelde een der cursisten, dat hij met dit systeem, als tabel met dubbele ingang, in de derde klas het moeilijkste verhoudingsprobleem had behandeld: van twee verzamelingen knikkers zijn verschil en verhouding bekend, bepaal ze. Hij moet een goede klas gehad hebben. Hoe zou de jeugd er nu op reageren?

9 Enige publikaties

In de in 1953 verschenen 'Rekendidactiek' van Turkstra en mijzelf werden verschilblok en verhoudingsblok genoemd. Aangepast aan het degradatieschema zou het eerste dan één etage lager dan het tweede moeten staan. Alles, wat in het verschilblok gaat over sommen en verschillen, geldt dan in het verhoudingsblok voor produkten en quotiënten. Het verhoudingsblok bespaart flink op de evenredigheden. Vroeger moesten we met allerlei omwisselingen uit ééndimensionale evenredigheid zeven andere afleiden, maar nu kan het veel vlotter gaan, overeenkomstig §§3 en 4.
De kruissomstructuur wordt zo vervangen door kruisproduktstructuur. M.i. kunnen kinderen al jong leren:
In een verhoudingsblok staan gelijke kruisprodukten.
De som- en verschileigenschap eiste veel woordomhaal en vormde het sluitstuk van de behandeling. Het volgende schema dient om aan te tonen, dat het anders moet.

Driehoeks-eigenschappen	Determinant-eigenschappen
Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken	$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{vmatrix}$
Een gelijkzijdige driehoek heeft gelijke basishoeken	$\begin{vmatrix} a & k\cdot a \\ b & k\cdot b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+k\cdot a \\ b & b+k\cdot b \end{vmatrix}$

Op de bovenste regels staan *directe* eigenschappen, op de onderste slechts *indirecte*. De linker wordt verzwegen, terecht! Toch inconsequent, de rechter dan te benadrukken! Dat was de reden, waarom ik in 'Compendium' (1954) de evenredigheid presenteerde als determinant met waarde nul, een enorme vereenvoudiging. Niet voor niets zegt een schertsdefinitie: *Wiskunde is de kunst, alles te vereenvoudigen.* De term 'term' kon nu ook verdwijnen om plaats te maken voor *element*, wat beter past bij matrix en determinant.

Men kan hier tegenwerpen, dat de determinant niet op het examenprogramma staat, maar de kritische lezer zal reeds in §6 ontdekt hebben, dat ik me daarvan weinig aantrok. Ik houd niet van een afgerond stuk kennis, omdat een enkele blik in een ruimer veld een dubbel voordeel heeft. Het *stelt in staat, de oudere kennis van uit hoger standpunt te overzien* (achtergrondkwestie) en het *prikkelt tot verdere studie*. Ik heb o.a. ervaring op een school, waar mijn stilzwijgende opdracht *pure examendressuur* was. Ik deed het anders en de resultaten bleken op het mondelinge examen. Ook werd zodoende de weg naar de universiteit geëffend.

In Euclides 26-2 van 1956 schreef wijlen S. J. Geursen een artikel waarin hij over $a : b = c : d$ de rake opmerking maakte, dat de relaties $a - b$ en $a - c$ van andere aard zijn, dan de relatie $a - d$. Hij propageerde de breukvorm van de evenredigheid boven de deelvorm. De letter b stoort de relatie $a - c$ dan niet en bij twee rechten met evenwijdige snijlijnen staan in een gunstige figuur de letters in een ordening, die bij de nieuwe vorm van de evenredigheid past. Ook gaf hij voorbeelden met sinusregel, scheikunde en handelsrekenen. Hij pleitte voor *eenvoud en uniformiteit* in verschillende vakken en vertelde met blijkbaar genoegen over *betere resultaten op proefwerken.*
In 1970 (Euclides 46-2, blz. 41) kwam een krachtige propaganda van Dr. P. M. Van Hiele, die met de naam *evenredigheidsmatrix* in de roos schoot.

Een recente publikatie van J. J. Sloff in Euclides 58-8, blz. 290 toont gelukkig ook veel aandacht hiervoor. Op een essentieel punt verschil ik echter van mening met deze auteur, zoals straks zal blijken.

10 Achtergronden voor definities

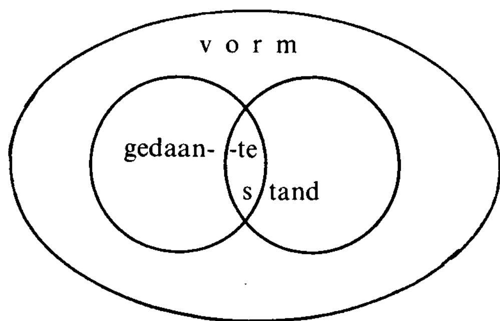
Als we een definitie voor een moeilijk begrip zoeken, kan het geen kwaad, wat te filosoferen over de gedachten, die de oermens hierover gehad zou kunnen hebben. Ordinaalgetal of cardinaalgetal? Vijf vingers, vijf kinderen, zonder vingers en kinderen, is dat nu vijf? Zouden dwaze ideeën toch waarde hebben? Als jongen zag ik een hoek als verschil van twee richtingen, tot Wijdenes mij toevoegde, dat het wel fout zou zijn. De lengte van een lijnstuk was voor mij het lijnstuk zelf, ontdaan van zijn plaats. Alles wiskundige wartaal, maar de theoreticus Schogt toonde mij een buitenlands boek met: *De lengte van een lijnstuk is de verzameling van alle lijnstukken, die ermee congruent zijn.* Ik was wild enthousiast. Kunt u zich dat voorstellen, lezer? De kwajongenstaal was wiskundetaal geworden, goed, tegen fout als achtergrond. Merk wel op, dat ik zwijg over het getalmatige afstandsbegrip, dat relatief is door vrijheid van eenheidskeuze. De stand van een vlak kon nu ook als verzameling gezien worden, met behulp van evenwijdigheid. Zulke gedachten worden doorkruist door

11 De opkomst van de transformaties

Omstreeks 1900 kon gelijkvormigheid nog berusten op hoek of verhouding. De eer, dit te hebben vervangen door vermenigvuldiging, komt Wijdenes toe.
Vraagstukken Wiskunde LO waren in toenemende mate toepassingen van ook andere transformaties, zoals torsie (wringing), dat is de samenstelling van vermenigvuldiging en wenteling, met eenzelfde centrum. Veel daarvan drong door in mijn klassepraktijk.
In de zestiger jaren gebruikten Troelstra c.s. transformaties als fundament voor de meetkunde, zodat de congruentie op lager plan kwam.
Als we nu de groeiende invloed van transformaties doortrekken tot in Schogt's definitie van lengte en deze gedachte tevens uitbreiden, dan komen we tot de

12 Definities van enige abstracte begrippen

Ter bekorting van alle volgende definities beginnen we met: De *transformatieverzameling* van een figuur is de verzameling, bestaande uit die figuur zelf, al zijn beelden met de genoemde transformatie en de beelden dáárvan.
De laatste toevoeging ontslaat ons van de plicht, te onderzoeken of elk element van onze verzameling uit elk ander kan ontstaan door éénmalige toepassing van de transformatie.
De lengte van een lijnstuk is zijn rotatieverzameling. Merk op, dat de keuze van centrum en rotatiehoek vrij is, dat de nulrotatie zorgt voor aanwezigheid van het bewuste lijnstuk zelf en dat translatie niet genoemd behoeft te worden wegens ontbindbaarheid in twee rotaties (vergelijk §10).
De grootte van een hoek is zijn rotatieverzameling. De twee genoemde definities zijn niet toegankelijk voor rekenwerk en ook niet daarvoor bedoeld. Ze moeten gezien worden tegen de achtergrond van het oerbegrip, dat zich beperkte tot groter en kleiner, meer en minder.
Genoemde definities kunnen samengevat worden in:
De gedaante van een figuur is zijn rotatieverzameling. Hierbij wil ik de lezer uitnodigen, zich een figuur voor te stellen, waarbij elk rekenwerk ondenkbaar is.
De vorm van een figuur is zijn torsieverzameling. Nadere uitwerking van deze gedachte m.b.t. spiegelbeelden laat ik aan de lezer over. *De stand van een figuur is zijn produktverzameling met positieve factor.*
Het is onmogelijk, een van deze begrippen te tekenen, omdat een mensenleven daartoe te kort zou zijn. Wie een *representant* van de stand van een kubus tekent, loopt groot risico misverstaan te worden. Het kon ook een representant van de gedaante of vorm zijn, zelfs nog iets anders, want het getekende Venn-diagram is uit te breiden met eenzijdige samendrukking en nog meer, waarmee we zelfs op topologisch terrein komen: samenhang.



Ons Venn-diagram moet in sommige gevallen vereenvoudigd worden. De begrippen plat vlak en rechte zijn in zoverre immuun voor vermenigvuldiging dat de grenslijnen voor vorm en voor gedaante samenvallen, met 'stand' in het binnengebied. Voor de bol vallen stand en vorm samen, met het veld, dat de gedaante aangeeft, erbinnen. Voor het punt vallen de drie kringen samen. Binnen de planimetrie gedraagt de cirkel zich als zojuist voor de bol beschreven, maar voor een cirkel in de ruimte ondergaat het hier afgedrukte diagram geen wijziging. Men kan de stand van een vlak gerust zijn translatieverzameling noemen, ook de stand van een rechte.

De stand van een halve rechte is dan ook zijn translatieverzameling. Hierbij twee opmerkingen.

a De stand van een halve rechte is geen deelverzameling van de stand van zijn drager, omdat rechte en halve rechte zwaar verschillen.

b Het woord richtingscoëfficiënt is in zoverre misleidend, dat het niet de richting van een halve rechte, maar de *stand* van een rechte aangeeft, behalve die van de *Y*-as.

13 Wat is een verhouding?

Op een onderwijzersexamen in 1922 werd gevraagd, hoe men een verhouding kwadrateert. Kandidaat veranderde $a:b$ in $ma^2:mb^2$, maar vergat $m = 0$ te verbieden. Kan het nog anders? Nee, dat is onmogelijk. Kijkt u nog eens goed, u heeft beide termen (foei!) gewijzigd. Kan het ook met wijziging van slechts één term? Dat heb ik al gedaan, want m kan alle waarden hebben, dus ook b.v. $1/a$ of $1/b$ en dan bereiken we wat u wilt. Blijkbaar hadden beide partijen steken laten vallen.

Als twee afstanden in yards zich verhouden als 2 : 3, dan is het in voeten 6 : 9. Hier wordt één verhouding aangegeven met twee verschillende *representanten*. Verhoudingen zijn geen quotiënten, geen getallen. Men kan ze niet optellen, wel kwadrateren, wel vermenigvuldigen met een andere verhouding. Men denke aan de stelling betreffende de oppervlakteverhouding van twee driehoeken, die een hoek gelijk hebben.

Ook het begrip verhouding blijkt ongrijpbaar zonder de mededeling dat m (zie bovengenoemd examen) alle positieve waarden kan hebben. Zo vinden we:

De verhouding van een getallenpaar, tripel, enz. is zijn produktverzameling met positieve factor.

Men zie de *hoogst merkwaardige overeenkomst* met 'stand' in § 12. Dit wordt *versterkt* door het feit, dat de *stand* van een vlakke figuur *vast ligt* door de *verhouding* van twee getallen, die van een ruimtefiguur door een getallentripel. Als de: *verhoudingsteken* is, dan moeten ook nullen toegelaten worden. De positieve factor speelt mee in het voorbeeld van de *winst*verhouding van vier kaartspelers. Zo is $2:7:-4:-5$ niet hetzelfde als $-2:-7:4:5$. Ook $0:0:0:0$ is hier denkbaar. Zullen we dit de lege verhouding noemen? Merk op, dat de niet-lege verhoudingen slechts door *representanten* zijn aangeduid; de verhouding zelf is immers evenmin te noteren als de bijbehorende stand te tekenen is. Gelukkig reiken gedachten verder dan concrete zaken en daden.

De door Wijdenes gepropageerde schrijfwijze met k · a, k · b, ... past bij het voorgaande en laat ruimte, om voor k iets ander dan een getal te nemen. Als iets bereid moet worden uit drie grondstoffen in verhouding 1 : 5 : 7, kan gewicht of volume bedoeld zijn.

14 Wat is een evenredigheid?

Dat is iets, dat rechtstreeks, zonder het representantbegrip, op te schrijven is. Ziehier onze gezins-

Diversen

Recreatie

Mededelingen

Kalender

Korrel

Themanummers

Boekbesprekingen

Euclides
Inhoud van de 60e jaargang 1984/1985

Artikelen

evenredigheid T of wel $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$, die de geboortedagen van onze kinderen in tijdvolgorde geeft, zoons boven, dochters onder. Een evenredigheid is blijkbaar een *deelverzameling van een verhouding*, zelfs een *op getallen betrokken doorsnede van twee verhoudingen*, één horizontaal en één verticaal genoteerd *gedacht*. De kortste definitie lijkt me: '... matrix met rang 1', wat veel uitleg eist.

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1		
	$\frac{1}{2}$	1	2		
	1	2	4		
6	2	4	8	10	20
9	3	6	12	15	30
	4	8	16		
	5	10	20		

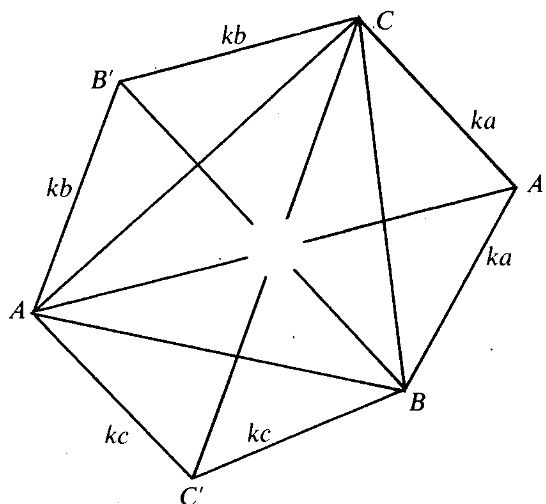
Daarom liever:
Een evenredigheid is een matrix met uitsluitend gelijke kruisproduktparen, die niet nul zijn. De vroegere hoofdeigenschap zit nu in de definitie. De schrijfwijze met bogen is ook geschikt voor de lagere school, naam evenredigheid of verhoudingsblok. Wie met het verschilblok wil werken, kan de bogen dan weglaten.
Het merkwaardige is nu, dat de naam evenredigheids*matrix* kan verdwijnen, met mijnerzijds oprechte dank voor de aan de propaganda bewezen diensten. Men zie:

rechthoek ig parallellogram
evenredigheid smatrix

We weten toch even goed, dat een evenredigheid een matrix is, als dat een rechthoek een parallellogram is.
De term 'aaneengeschakelde evenredigheid' zou ik evenmin willen gebruiken als de term 'gedurig produkt'; ik meen trouwens, dat de laatste afgeschaft is. In het volgende voorbeeld tracht ik aan te tonen, hoe de evenredigheid

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \end{pmatrix}$$

in de praktijk gebruikt kan worden.



Hier zijn de middens der zijden van driehoek ABC vervangen gedacht door toppen van gelijkvormige gelijkbenige driehoeken. De concurrentie der zwaartelijnen is gegeneraliseerd. We redeneren aldus: De driehoeken ABB' en ACC' hebben een hoek bij A gelijk en omdat $kb \cdot c = kc \cdot b$ hebben ze ook gelijke oppervlakten volgens de in §13 genoemde stelling. Het slot van de redenering gaat met het omgekeerde van de stelling van Ceva.
Na de generalisatie volgt een verrassende specialisatie: de gelijkbenige driehoeken geven we een tot 0 naderende tophoek, A', B' en C' gaan naar oneindig en het blijkt, dat de hoogtelijnen door een punt gaan.
Het is opvallend, hoeveel van de besproken zaken bij deze stelling optreden. Ook dit is geen structuurwisseling maar een transformatie.

15 Consequentie en één-eenduidigheid

Terug naar §1 en naar de evenredigheid. Na realisatie van het voorafgegane zou het volgende bereikt zijn:
Het verhoudingsbegrip is ingepast in dat van andere begrippen, die naar mijn smaak een aparte klasse vormen, omdat ze steunen op verzameling en transformatie. Het verband tussen stand en verhouding is verstevigd.
Het plaatsprincipe heeft de evenredigheid dichter bij de lagere school gebracht en ook dichter bij de meetkunde.

Het reversibiliteitsprincipe heeft zowel de definitie als de eigenschappen van de evenredigheid vereenvoudigd.
Het structuurprincipe heeft structuur in deze eigenschappen gebracht door een paar vroegere lastposten terug te wijzen naar matrix (schoonvegen) en determinant.
Er blijft nog één wens over, betreffende het teken :, dat de lagere school ten onrechte voor deling gebruikt, omdat noch de winkelier, noch de wiskundige het nodig hebben. Ik herhaal (§1) het *voorstel tot afschaffing ervan*, zelfs internationaal met inbegrip van het Engelse deelteken, dat te veel op een plusteken lijkt. In computerteksten ziet men nu het teken / de deling aangeven, moge dit consequent doorgevoerd worden! Kleine variaties moeten dan geoorloofd blijven. Voor lange vormen de horizontale streep, die daarvoor de enige gebruikelijke is. Engeland doet een goede gooi in praktische richting, blijkend uit borden zoals Xtown $2^3{}_4$ die de mijlafstanden aangeven met de *ontbrekende breukstreep*, mogelijk gemaakt door het *plaatsprincipe* (?). Het weglaten van de breukstreep werkt de verduidelijking zeer in de hand. Dit systeem zou ik ook voor de lagere school en de drukkers willen aanbevelen en op de schrijfmachine (niet $\frac{1}{4}$). De term dubbelverhouding zou in dubbelquotiënt veranderd moeten worden met schrijfwijze $\frac{/}{/}$, wat een kleine, m.i. haalbare concessie is.

Nu even terug naar het degradatieschema. Wie van ezelsbruggetjes houdt, kan zich helpen met 'Met Vader op Wandeling Door Amsterdam' of, na behandeling van de logaritmen '... Langs De Amstel', wie weet langs de bakermat van het verhoudingsblok. Het schema geeft mogelijkheid tot behandeling van eenvoudiger stof als voorbereiding tot iets moeilijkers. Verschilblok voor verhoudingsblok; vergelijkingen van het type

$$5x - y - 4z = 9$$
$$2x + y - 3z = 5,$$

waarin de som der coëfficiënten nul is vertonen een zekere overeenkomst met homogene vergelijkingen; in plaats van de verhouding der onbekenden bepalen ze hun verschillen, wel te verstaan als 'différence inachevée'. Ze kunnen optreden bij sportprestaties en zo de belangstelling vergroten. Bij het oplossen van beide soorten treden overeenkomstige handigheidjes op.
In het onderste viertal van genoemd schema kan men, in dezelfde ordening als op mijn rekentuigje, de letters vervangen door de tekens, die de bewerkingen aangeven. In plaats van O, A en V komt er dan +, − en × en men ziet links twee kruisjes. Om het minteken te schrijven laten we één streepje van het plusteken weg. Toch consequent, om dan ook het deelteken te schrijven (ook op het rekentuig te drukken) door één streepje van het maalteken weg te laten? Even glimlachen alstublieft, altijd ernstig is ook niet gezond!

×	/
+	—

De auteur was, behalve wat uit het artikel blijkt, redactielid van Mathematica A, lid van de vernieuwingsgroepen W.V.O. en C.I.E.M. en didactiekdocent Wiskunde M.O.A. Met een zeer kort taalleraarschap beëindigde hij zijn 50-jarige carrière.

Het gebruik van letters

P. G. J. Vredenduin

'Hoe zullen we variabelen in de brugklas invoeren?'
Moeilijke vraag. 'In elk geval ons eerst duidelijk maken wat variabelen eigenlijk zijn. En eerst daarna een beslissing nemen.'
'Probeer dat dan eens op te schrijven.'
Dit werd de aanleiding voor dit artikel.

Wat is een variabele?

Een poging het antwoord te zoeken bij de formele logica blijkt al snel tot mislukken gedoemd. In de formele logica vindt men de regels volgens welke men met variabelen opereert. Wat een variablele eigenlijk is, komt echter niet ter sprake.
Het is duidelijk dat variabelen taalbestanddelen zijn. Er is geen reden aan te nemen, dat de taal van de wiskunde zozeer afwijkt van de niet-wiskundige taal, dat variabelen alleen in de wiskunde zouden voorkomen. De gangbare, ietwat vage, interpretatie van variabele is: 'een letter (in de algebra) stelt een getal voor'. Sommigen zeggen 'een willekeurig getal', maar dat maakt de zaak niet duidelijker.
Ondertussen helpt de vage interpretatie ons wel. Willen we in ruimer verband onderzoeken wat een variabele eigenlijk is, dan ligt het voor de hand de rol van het onbepaalde lidwoord in de taal te analyseren. Ik wil me oriënteren aan een serie voorbeelden.

a Ik raak in gesprek met een treinconducteur en informeer wat hij doet met een reiziger die niet wil betalen. Hij vertelt me wat hij in een dergelijk geval doet.
'Ik vraag *een man* zijn kaartje.
Hij heeft geen kaartje.
Ik zeg dat *hij* moet betalen.
Hij neemt een dreigende houding aan en wil mij te lijf gaan.
Ik heb geen zin in vechten en laat *hem* in zijn sop gaar koken.
Waar het om gaat, is de uitdrukking 'een man' in de eerste regel. Daarmee wordt blijkbaar bedoeld: een of ander element van de verzameling van de mannelijke reizigers. In de eerste zin wordt in het midden gelaten wat voor element; dat doet er nog niet toe. Daarna worden bijzonderheden vermeld van het gekozen element. De gecursiveerde woorden verwijzen telkens naar de gekozen man.

b Een gesprek in de leraarskamer.
'Je moet mij eens raad geven. Ik heb moeilijkheden met *een collega*. Ik noem liever geen naam, maar *hij* is nogal grof.
Net als ik geeft *hij* alleen maar les in de bovenbouw. Veel leerlingen hebben, alleen al door *zijn* kraakstem, een intuïtieve hekel aan *hem*.'
'Hou maar op. Ik weet al lang wie je bedoelt.'
In de eerste regel wordt met 'een collega' een of andere leraar van de school bedoeld. Cursivering als onder a.

c Als *een koe* drachtig is, moet *ze* krachtvoer hebben.
Het gaat hier over de een of andere koe. Ze is drachtig. Ze moet dus krachtvoer hebben.

d *Een koe* heeft vier magen.
De een of andere koe; het doet er niet toe welke. Die heeft vier magen.
Nu proberen analoge situaties uit de algebra te ontdekken.

a' Ik kies *een natuurlijk getal*.
Het is deelbaar door 3 en *het* is ook deelbaar door 4.
Als je *er* 1 bij optelt, krijg je een 5-voud.
Dan is *het* een 60-voud plus 36.

b' *Een reëel getal* plus *zijn* kwadraat is gelijk aan 56.
Het is positief.
Dan is *het* gelijk aan 7.

c' Als *een priemgetal* groter dan 3 is, is *zijn* kwadraat een 12-voud plus 1.

d' *Een natuurlijk getal* is groter dan of gelijk aan 0.
De analogie is duidelijk, mits men van emotionele associaties abstraheert. In *a'-d'* gaat het over een element van een bepaalde getalverzameling (natuurlijke getallen, reële getallen, priemgetallen groter dan 3). Irrelevant is welk element men kiest. Het

gaat over een of ander element van de verzameling. Nu wordt duidelijk wat een variabele is.
Variabele betekent: *een of ander element van een bepaalde verzameling.*
In de voorbeelden *a-d* was deze verzameling de verzameling van mannelijke reizigers, van leraren van een bepaalde school, van koeien. In *a'-d'* waren het getalverzamelingen. Maar hiertussen is geen principieel verschil.
Variabelen spelen dus buiten de wiskunde een gelijksoortige rol als binnen de wiskunde.
Wat de zaak vertroebelt en moeilijk maakt is de keuze van het woord 'variabele' of 'veranderlijke'. Er verandert niets. De associaties die het woord veroorzaakt, moeten dus de kop ingedrukt worden. Dat is ongelukkig maar ik vrees dat er weinig meer aan te doen is. Zou men spreken van '*een willekeurige*', dan zouden misverstanden voorkomen kunnen worden.
Tot nog toe zagen we geen verschil tussen de taal van de algebra en de omgangstaal. Zodra er in een zin of in een betoog meer dan één variabele voorkomt, worden de problemen groter.

e Als *een bewoner* EEN BUURMAN geregeld geluidsoverlast aandoet, is het normaal dat DEZE de politie inschakelt om *hem* tot de orde te roepen.

Twee variabelen: een bewoner en een buurman. Door cursiveren resp. klein kapitaal zetten zijn ze van elkaar onderscheiden. (De gangbare zegswijze is: 'Als iemand zijn buurman geregeld ...' De structuur van de zin wordt nu verdoezeld, zodat ik mijn toevlucht heb moeten nemen tot een meer gekunstelde constructie.)

e' Als *een getal* vermenigvuldigd wordt met de som van *twee getallen*, krijgt men dezelfde uitkomst als wanneer men *het eerste getal* vermenigvuldigt met *het tweede* en ook *het eerste* met *het derde* en dan de verkregen uitkomsten optelt.

De variabelen zijn door de toevoegingen 'eerste', 'tweede' en 'derde' voldoende uit elkaar gehouden. Toch is het maar een moeizaam geheel. Onze voorouders hebben zich lange tijd op de één of andere manier zo moeten behelpen en namen dan vaak hun toevlucht tot geometrisering van de getallenleer. Totdat Vieta (1540-1604) op het idee kwam variabelen door letters voor te stellen. Hoe gaat dat?
Zoals bekend wordt *e'* dan:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Om deze uitspraak in natuurlijke taal om te zetten, moeten we:
de eerste a vervangen door 'één of ander getal'
elke volgende a vervangen door 'datzelfde getal'
en analoog te werk gaan met b en c. (En natuurlijk er zorg voor dragen dat telkens duidelijk is waar 'datzelfde' op slaat.) In principe kan men altijd zo te werk gaan. Doet men dat, dan gaat e over in:
Als a geregeld b geluidsoverlast aandoet, is het normaal dat b de politie inschakelt om a tot de orde te roepen.
Hierin stelt a een of andere bewoner voor en b een of andere buurman van a.
We zien hieruit: als een variabele door een letter voorgesteld wordt, dan zijn we verplicht op te geven op welke verzameling de variabele betrekking heeft. *Een variabele is dus steeds betrokken op een bepaalde verzameling.* Men spreekt dan van een *variabele over die verzameling.*

Het voorbeeld *e'* is karakteristiek voor het algebraïsche rekenwerk (de herleidingen), dat traditioneel in de brugklas verricht werd. Behalve met herleidingen hebben we daar ook met vergelijkingen te maken. Volgens modernere opvattingen is er niet zo'n scherpe scheiding tussen herleidingen en vergelijkingen en dat is een vooruitgang. Tussen de beelden *a'-e'* was geen principieel verschil. Toch doet *e'* denken aan een herleiding en *b'* aan een vergelijking. Het verschil is niet zozeer van structurele aard als een verschil in opdrachtvorm. In het geval van algebraïsch rekenwerk is de opdrachtvorm een gebiedende wijs: herleid. In het geval van vergelijkingen wordt de opdracht in vraagvorm geformuleerd.
Ter wille van de duidelijkheid wil ik toch nog ingaan op dergelijke opdrachten in vraagvorm. Voorbeelden uit het dagelijks leven zijn meestal iets gekunsteld. Ik ga maar direct naar de wiskunde.
Twee getallen zijn samen 30. Hun verschil is 10. Welke getallen zijn dat?
Als *twee getallen* samen 30 zijn, is *het ene getal* gelijk aan 15 plus *een getal* en *het andere* gelijk aan 15 min *datzelfde getal. Hun* verschil is dan 2 maal *dat getal. Hun* verschil is 10. *Dat getal* is dus 5. De *twee getallen* zijn dan 15 + 5 en 15 − 5, dus 20 en 10.

Hierin komen drie variabelen voor. Eerst de 'twee getallen' en later 'een getal' (in '15 plus een getal'). Tot slot een tweetal vergelijkingen waarin de variabele door een letter wordt voorgesteld.

g' Los x in $\mathbb{Q}$ op uit $5x + 2 = 2x + 11$.
x is hier een variabele over $\mathbb{Q}$.
Nu de oplossing.
Als voor *een of ander rationaal getal* x geldt
$5x + 2 = 2x + 11$
dan geldt voor *dat getal* ook
$5x = 2x + 9$
Dan geldt voor *dat getal* ook
$3x = 9$
en is *dat getal* dus gelijk aan 3.
(De pijlen terug mag de lezer er zelf bijdenken.)

Zo gezien hebben vergelijkingen niets bijzonders. Er is evenzeer sprake van 'een of ander getal' als bijvoorbeeld in *e'* (de distributieve eigenschap). Wie eerst $ab = c$ herleidt tot $b = \frac{c}{a}$ en dan vraagt: als $a = 15$ en $c = 5$, wat is b dan?, is ongemerkt overgegaan van een herleiding op een vergelijking. Als iemand nu geleerde betogen gaat houden over open beweringen om vergelijkingen in te leiden, dan doet hij overbodig werk en kweekt hij eerder begripsverwarring dan begrip.

Een veel voorkomend misverstand wil ik nog uit de weg ruimen. De vergelijking *g'* heeft toevallig precies één oplossing. Dit geeft nogal eens aanleiding tot de onderstelling dat x hier het getal voorstelt dat men zoekt en nog niet kent, en niet een willekeurig rationaal getal. Deze opvatting heb ik al menen te weerleggen. Voor wie nog niet overtuigd is het volgende voorbeeld.

h' Los x in $\mathbb{R}$ op uit $x^3 - x = 0$.
x is een variabele over $\mathbb{R}$.
Als voor *een of ander reëel getal* x geldt
$x^3 - x = 0$
dan geldt voor *dat getal*
$x(x - 1)(x + 1) = 0$
en is *het getal* dus gelijk aan 0 of aan 1 of aan -1.
Men besluit tot de equivalentie
$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$.
Duidelijk is dat hierin x een willekeurig reëel getal voorstelt.

Het gebruik van letters in de meetkunde

In de schoolmeetkunde is de situatie totaal anders. Vanuit hoger standpunt kan men vaststellen dat het niet mogelijk is in de meetkunde door middel van een definitie een bepaald punt vast te leggen. Spreekt men over punt A, dan kan daarmee dus alleen maar bedoeld zijn een of ander punt. A is dus een variabele.

Een leraar heeft bitter weinig aan dit inzicht. Hij tekent een vierkant en praat dan over dit vierkant. Het is omslachtig te moeten spreken over het hoekpunt linksonder en het hoekpunt rechtsboven. Daarom geeft hij de hoekpunten een naam. Hij noemt ze A, B, C en D. Maar dan is A geen variabele. Met A wordt niet een of ander punt bedoeld, maar een bepaald punt. Het is een naam voor dat punt. Voor de leerling is dit even simpel als het feit dat zijn buurmeisje Annie heet. Vandaar dat zich hier geen speciaal didactisch probleem voordoet.

Merkwaardig is dat de situatie ongemerkt verandert. De naam wordt tot variabele. Zo luidt de stelling van Pythagoras:
als in $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, dan geldt
$AC^2 + BC^2 = AB^2$.
Hierin zijn A, B en C variabelen. Ze stellen alle drie een of ander element van de verzameling van de punten voor.

De overgang van letters als namen van punten op variabelen over de verzameling van de punten geschiedt zo geleidelijk, dat de leerlingen en zelfs de meeste leraren er niets van merken. De leerling heeft daarbij bovendien steun aan de algebra, waarin hij reeds met lettervariabelen gewerkt heeft.

Soorten variabelen

Men onderscheidt verschillende soorten variabelen, zoals vrije en gebonden variabelen, onbekenden, onafhankelijke en afhankelijke variabelen (variabelen voor origineel en beeld), parameters.
Voorbeelden:
Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt $x^2 + 5x - 7 = 0$? Men spreekt hier van een vergelijking en noemt x een onbekende.
Voor elke $a \in \mathbb{R}$ is f_a de functie $x \to ax^2 - x + a$ met

domein $\mathbb{R}$. Hier heet *a* een parameter en *x* onafhankelijke variabele (om deze ouderwetse term nog eens te gebruiken).
Voor welke $p \in \mathbb{R}$ geldt dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ $px^2 + x - 1 = x^2 + x - p$? Hier is *x* een gebonden variabele, *p* een vrije variabele en bovendien *p* een onbekende.
Uit de toevoegingen '$x \in \mathbb{R}$', '$a \in \mathbb{R}$', '$p \in \mathbb{R}$', 'met domein $\mathbb{R}$' blijkt dat in al deze voorbeelden *x*, *a* en *p* variabelen over $\mathbb{R}$ zijn. Ze duiden dus 'een of ander reëel getal' aan. In zoverre is er geen enkel verschil. Eerst ten gevolge van de context waarin deze variabelen voorkomen, treden verschillen op. Uit deze context blijkt dat we te maken hebben met een onbekende, een parameter, een onafhankelijke variabele, een vrije of een gebonden variabele.

Enkele didactische conclusies

Ik ben van mening dat men er verstandig aan doet in de algebra de leerlingen van meet af aan vertrouwd te maken met de enige betekenis die variabelen hebben: ze stellen een of ander element van een bepaalde getalverzameling voor. Ik durf me er niet over uit te laten welke weg men daarbij het beste volgen kan. Ik laat dit graag aan mijn collega's over. Wel wil ik enkele conclusies trekken die uit mijn opvatting volgen:

1 Het is niet verstandig een methodische scheiding te maken tussen herleidingen (algemene waarheden) en vergelijkingen.

2 In nauw verband hiermee staat dat het overbodig en zelfs verwarrend is te spreken over open uitspraken.

3 Ik heb wel eens introducties gezien voor het invoeren van letters van de volgende vorm. Neem een getal in gedachten. Vermenigvuldig het met 6. Tel er 9 bij op. Vermenigvuldig de uitkomst met 4. Trek er 36 af en deel daarna door 3. Wat heb je nu gekregen? Antwoord: 36. Dan had je 12. Hoe weet ik dat zo gauw? Het getal dat je had, ken ik nog niet. Ik noem het maar even *a*. Dan heb je eerst 6*a* gekregen, enz.
Hier heeft *a* niet de functie van een variabele. Het is de naam voor een welbepaald getal. Dat de ene persoon dat getal al kent en de ander nog niet, doet niet ter zake. Dit voorbeeld is dus geen geschikte methode om het begrip variabele in te leiden. Zelf heb ik vroeger deze methode vaak toegepast. Hij functioneerde slecht en ik begrijp nu waarom.

4 In de brugklas worden vaak substitueersommen getraind. Dus opgaven van de soort: ik geef dat $a = 4$ en $b = 9$. Hoeveel is dan $a^2 + ab$? Bij dit soort sommen wordt de aandacht van de leerling juist afgeleid van de essentie. Hier stellen *a* en *b* bepaalde getallen voor en hebben ze het karakter van een variabele verloren.
Ik zou dit substitueren liever trainen op momenten dat het zin heeft. Bijvoorbeeld bij vragen als: voldoet 2 aan de vergelijking $x^2 + 3x = 8$? En: gegeven is de functie $f: x \rightarrow x^2 + 1$, bereken $f(3)$.
Hier krijgt substitueren zin. De variabele *x* stelt een of ander reëel getal voor; *x* is dus een variabele over $\mathbb{R}$. Nu kan men voor *x* een of ander element van $\mathbb{R}$ kiezen. Is *x* een variabele over $\mathbb{R}$, dan is een uit $\mathbb{R}$ gekozen getal voor *x* een waarde van de variabele. Prima, maar val de leerling hiermee nog niet direct expliciet lastig. Doe dit eventueel wel geruisloos, bijvoorbeeld in toepassingen van de algebra. Voor de oppervlakte van een rechthoek geldt: $O = ab$. Een stuk weiland is 120 m lang en 80 m breed. Wat is zijn oppervlakte? Ieder ziet nu automatisch dat *a* en *b* variabelen zijn en dat je er dus bepaalde waarden voor kunt substitueren. En dat is juist wat je de leerlingen graag wilt leren. Of:
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Bereken nu $46^2 - 44^2$.
De brute sommetjes van de vorm: ik geef je dat $a = 4$ en $b = 9$, missen hun doel en dreigen zelfs verkeerd inzicht te bevorderen.

Naschrift
In *Euclides* 60, nr. 3, blz. 123-130 verscheen een artikel van Joop van Dormolen over variabelen. Er schijnt verband tussen zijn en mijn artikel.
Oppervlakkig gezien lijkt het of Joop en ik het ergens niet eens zijn. Niets is minder waar. Joop en ik stellen geheel verschillende vragen. Ik vraag wat een variabele eigenlijk is. Joop daarentegen hoe een variabele functioneert en wat iemand zich bij een variabele voorstelt. Je zou kunnen zeggen dat zijn artikel didactisch van aard is en het mijne predidactisch in hoofdzaak. Hetgeen precies klopt met het terrein waarop we ons bewegen.
Het is dus niet de bedoeling van ons elkaar tegen te spreken, maar wel elkaar aan te vullen.

Op weg naar oplosmethoden met ruime toepasbaarheid

P. M. van Hiele

Het toetsen van inzicht

Zo lang ik bij het onderwijs betrokken ben, als leerling, leraar of gepensioneerde, werd ik met het probleem gekonfronteerd dat een leerling iets anders moest presteren dan hem speciaal geleerd was. Jarenlang leerde je woordjes van een vreemde taal, las je boeken in die taal, vertaalde je stukken uit die taal, en op het examen kwamen ze met woorden die je nooit gezien had.
Je leerde van zure en basische zouten en op het proefwerk kwamen ze aanzetten met zure en basische zouten tussen ortofosforzuur en aluminiumhydroxide en dan deed het er niet toe of die verbindingen wel bestonden en op een of andere manier van belang waren.
Je leerde hoe je $\sqrt[4]{(a^4 + b^4)}$ moest konstrueren als a en b gegeven lijnstukken waren en op het proefwerk kwamen ze aan met $\sqrt[8]{(a^8 + b^8)}$. Alweer, het kwam er niet op aan of het enige zin had zo iets te willen konstrueren, je moest laten zien dat je de stof met 'inzicht' had bestudeerd.
Leerlingen moesten aantonen dat ze niet zo maar wat foefjes en handigheidjes geleerd hadden, maar ze moesten laten zien dat ze hun geest 'verrijkt' hadden. Eigenlijk wilde men dus de manifestatie van een wonder: ofschoon men het ene had onderwezen, wenste men het andere als onderwijsresultaat te zien. Men vergat daarbij dat echte wonderen nooit komen, als men er direkt om vraagt, ze komen altijd onverwacht. Zo is het ook met inzicht, wáár inzicht.

Wat is inzicht?

In mijn proefschrift van 1957 heb ik een 'definitie' van inzicht gegeven: 'Inzicht wordt steeds als zodanig herkend, als de persoon in kwestie intentioneel, adekwaat weet te handelen in een nieuwe situatie.' Met intentie – want de oplossing moet hem niet toevallig in handen gekomen zijn. 'Adekwaat' veronderstelt een boven de partijen staande scheidsrechter die in staat is het resultaat objektief te beoordelen. De eis, dat de situatie nieuw is, verbiedt dat men op de opgaaf getraind heeft.

Wat is een nieuwe situatie?

Op het eindexamen hield ik ervan kandidaten door de gekommiteerde te laten examineren. Zij liepen de kans van een bijzonder inzicht te getuigen door in een nieuwe situatie verbluffend goede antwoorden te geven. De gekommitteerde beoordeelde de situatie als nieuw, omdat hij de opgaaf verzonnen had en begreep niet dat de kandidaat enorm zwijnde omdat hij zo iets al eerder gezien had.
Met 'nieuw' stelt men zijn eisen dikwijls veel te hoog. Bekend is de ontstemming van natuur- en scheikundeleraren omdat de leerlingen wiskunde in hun lessen onvoldoende weten toe te passen. Maar iemand die algebra en meetkunde geleerd heeft, kan die kennis meestal niet zo maar in natuur- of scheikunde toepassen. In de natuur- en scheikunde worden wiskundige *modellen* gehanteerd en de vaardigheid van het grote probleem in het wiskundige model-brengen moet eerst geleerd worden. Dikwijls zijn de problemen totaal nieuw. In de scheikunde word je soms met drie heel lelijk uitziende getallen gekonfronteerd en dan moet je drie niet te grote getallen zien te vinden die bij voldoende benadering zich net zo verhouden als de drie lelijke getallen. Als leerlingen hierin falen komt dit niet door een gebrek aan kennis van verhoudingen – zoals de scheikunde-docent soms beweert.
In de natuurkunde komen grootheden voor die evenredig, omgekeerd evenredig en soms nog erger zijn, in de wiskunde heeft men voor deze materie maar matig belangstelling.

Men wil wel eens het geringe sukses dat leerlingen met hun wiskundige kennis hebben in natuur- en scheikunde toeschrijven aan een systeemscheiding. Vroeger heb ik eens uitgelegd (System Separation and Transfer, in Educational Studies in Mathematics, 1974, Reidel Dordrecht) dat natuur- en scheikundige wiskunde eigenlijk nieuwe vakken zijn die apart geleerd moeten worden.

Het programmeren op oplosmethoden

Alle onderwijzen komt erop neer dat je probeert leerlingen op een of andere wijze te programmeren. Het welslagen van het programmeren van een oplosmethode is verzekerd, als men zich beperkt tot oplosmethoden die een niet te groot bereik hebben. Als men te veel wil, komen er dikwijls moeilijkheden.

Een leerling kan geleerd hebben, hoe je het vraagstuk moet aanpakken van twee arbeiders die een werk in resp. 9 en 12 dagen kunnen verrichten en het nu samen moeten doen. Dit vraagstuk berust op het model dat een kontinue verdeling van het werk vooropstelt. Na de methode van oplossen te hebben aangehoord en te hebben begrepen, krijgt hij het vraagstuk van twee kranen die een bad in resp. 9 en 12 minuten kunnen laten vollopen. *Is* dit nu werkelijk een analoog probleem? Er wordt gesuggereerd van wel, maar vervang het probleem eens door dat van twee kranen die een bad in resp. 9 en 12 minuten kunnen laten *leeglopen*. Van de redenering blijft dan niets meer over, hoe het met de uitkomst is, weet ik niet. De moeilijkheid van het herkennen van de situatie, de ingewikkeldheid van de bewoordingen, vormen niet de enige belemmering die de toepassing van de oplosmethode in de weg zit. De leerling die aarzelt bij het gebruik van het oplosmiddel, is stellig niet de domste.

De beperktheid van het model

Een scheikundeleraar vraagt, hoeveel gram waterstof er uit één liter water ontwikkeld kan worden. Hij ziet daarin een eenvoudige verhoudingsopgave. Maar voor de leerlingen ontstaat het inzicht pas, nadat hij heeft laten zien hoe het model tot stand is gebracht.

Talloze natuur- en scheikundesituaties leren ons dat een wiskundig model slechts onder bijzondere omstandigheden van toepassing is. Hoe moet een leerling weten, in welke gevallen de toepassing wèl en in welke gevallen de toepassing niet van kracht is? In ieder geval is het niet de transfer van de wiskundemethoden die tekort schiet.

Het probleem van de twee arbeiders, die samen een werk moeten verrichten, laat mij niet los. Wanneer is dat model eigenlijk bruikbaar? Wacht eens: zakjes plakken. Een werk bestaat uit het plakken van 108 zakjes. A kan dit werk doen in 9 uur, B heeft daar 12 uur voor nodig. Als ze het samen doen, hoeveel uur gaat dit kosten? Het model zeg $5\frac{1}{7}$ uur. Mijn intuïtie zegt dat dit een onzinnig antwoord is. Goed, A doet 12 zakjes per uur en B 9 zakjes, dus na 5 uur hebben ze samen 105 zakjes geplakt. Blijven nog 3 zakjes over. A pakt het 106e zakje, B het 107e. Na 5 minuten is A klaar en B nog bezig. A doet 5 minuten over het 108e zakje terwijl op het eind B toekijkt. Resultaat: na $5\frac{1}{6}$ uur is het werk verricht en het model heeft weer gefaald. Het verwerpen van een methode getuigt dikwijls van meer inzicht dan het gebruik ervan in extreme gevallen.

De algemeenheid van een methode

Wiskundedocenten en wiskundeboeken hebben vaak een drammerig karakter. Ze ontwikkelen een methode waarin grafieken de boventoon voeren en zij eisen dat de leerling steeds maar grafieken toepast. Ik herinner mij nog het advies dat ik zelf in de vijftiger jaren gaf voor het eindexamen: 'Denk erom, als er een vraagstuk komt met een ongelijkheid, gebruik dan steeds een grafiek!' Maar een leerling die de opgaaf $3x + 5 > 19$ moet oplossen, kan het veel beter zonder. Hulde dus de leerling die het advies terzijde legt en naar een kortere oplossing zonder grafieken overstapt. Hij maakt een goede kans nieuwe probleemsituaties aan te kunnen.

Ik heb zelf een methode ontwikkeld waarbij vectoren in de eerste klas van het voortgezet onderwijs worden geïntroduceerd. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van positieve en negatieve getallen worden dan heel erg zichtbaar. Goniometrie

kan in een nutschell worden behandeld en ouderwetse stereo-examenopgaven vereisen geen stereometrisch inzicht meer. Dit is echt een middel waarbij leerlingen geprogrammeerd worden op een wijze die succes biedt. Maar men moet er oog voor houden, dat er situaties zijn waarbij het op de manier zonder vectoren beter gaat. Als samensteller van de methode heb ik er echt mee geworsteld om maat te houden en niet alles met vectoren te willen doen. Als je eens echt ruim in je vrije tijd zit, is het best amusant ongeschikte onderwerpen met vectoren te willen doen, maar de leerlingen mogen daarmee niet geplaagd worden.
Het leren van veelzijdige methoden maakt ons soms blind voor andere mogelijkheden. Het meest succesvol is onderwijs waarin eigen initiatieven van leerlingen gestimuleerd worden.

Algoritmen

Een groot deel van de energie van leerlingen wordt besteed aan het aanleren van algoritmen. Hiertoe reken ik ook de oplosmethoden, hiervoor genoemd. Het meest bekend zijn natuurlijk de algoritmen van het rekenen: optellen, vermenigvuldigen, (staart)delen, het rekenen met breuken, enz. Ik ontken niet dat goed kunnen rekenen een mens te pas kan komen, maar men moet wel beseffen dat de tijd daaraan besteed ten koste van het leren te pas brengen van eigen initiatieven. Leraren lbo die te maken krijgen met A-leerlingen die zelfs moeite hebben met de eenvoudigste optellingen en vermenigvuldigingen blijken dikwijls ook op hun school veel aandacht aan deze algoritmen te willen besteden. Het lijkt me vergeefse moeite: op de leeftijd van 12, 13 jaar is de gevoelige periode voor het aanleren van die algoritmen al lang voorbij. Er zijn toch rekenmachientjes! Bovendien hebben deze leerlingen ruimschoots de tijd gehad een onuitroeibare aversie tegen algoritmen van het rekenen aangekweekt te hebben. Dikwijls blijken deze leerlingen nog heel wat te kunnen presteren als het wiskunde betreft, als ze daarbij maar vooral niet aan de door hen verafschuwde algoritmen herinnerd worden. Ik betwijfel ook of het zo hevig instuderen van de formule voor de oplossing van een vierkantsvergelijking wel zoveel aandacht verdient als thans het geval is. Waarom niet de formule ter beschikking gesteld en gevraagd een programma op te stellen voor zo'n oplossing? Er zijn zoveel formules die ons ter beschikking staan en die we toch ook niet uit het hoofd leren.

Het toetsen van de resultaten

De ellende van ons onderwijs is, dat het objektief getoetst moet worden. Wij kunnen ons in een kursus problem-solving tot doel stellen. Maar om te laten zien dat wij succes gehad hebben worden er nieuwe problemen opgesteld die de leerlingen zullen moeten kunnen oplossen. Maar dit leidt er ongewild toe dat wij ons op die problemen gaan richten. De 'beste' leraar in het vwo is die leraar die weet uit te rekenen welke opgaven er dit jaar te verwachten zijn en die daarop heeft weten te trainen. Maar dat heeft weinig meer te maken met het kweken van inzicht. Ik heb in mijn loopbaan vele malen blijk gezien van echt goed inzicht, maar dat kwam niet of nauwelijks op proefwerken of examens; het kwam onverwacht, onuitgenodigd, zo maar tijdens de les. Het onderwijs waarbij er de meeste kans is op inzicht, is dat onderwijs waarin de leerling voortdurend uitgenodigd wordt mee te denken en kritiek te oefenen. Een belangrijk blijk van inzicht geeft die leerling die bij het vraagstuk van de arbeiders die een werk in 9 resp. 12 dagen kunnen verrichten, opmerkt dat het model meestal niet toepasbaar is en vraagt naar een situatie waarin dit model wél werkt. Zo'n leerling heeft de meeste kans in een konkrete situatie een model al of niet te verwerpen.

Oplosmiddelen

Kohnstamm heeft eens gezegd dat een leraar de leerlingen het beste helpt door ze zoveel mogelijk oplosmiddelen te verschaffen. Men kan uit het voorgaande opmaken dat ik bij die konstatering mijn vraagtekens zet. Ik denk wel dat het van belang is dat een leerling weet dat die oplosmiddelen er zijn en het is nuttig dat hij weet hoe hij deze in boeken kan vinden en ze dan kan toepassen. Het leren van een groot assortiment van oplosmiddelen is goed voor zeer begaafde leerlingen, gewone leerlingen zullen er alleen maar wanhopig van worden.

De instelling van leerlingen

Men kan zich ten doel stellen de kritische zin van leerlingen te ontwikkelen. Dit streven is niet bepalend voor de onderwerpen die behandeld moeten worden. Wat erop aankomt is de wijze waarop de leraar voor de klas staat. Hij moet niet zijn de man die zijn verhaal houdt en alles weet, zijn les moet integendeel een gesprek zijn waarbij de leerlingen hun eigen inbreng en hun eigen mening hebben. Voor veel docenten zal dit een zware opgaaf zijn: zij houden er niet van dat hun mening in twijfel getrokken wordt en zij vinden het zo heerlijk een sluitend betoog te kunnen houden, dat niet gestoord wordt door kritische opmerkingen. Als de leerlingen in een probleemsituatie een eigen inbreng hebben, moeten zij ook de kans hebben hun eigen gang te gaan, ook als de leraar van mening is, dat het op een andere manier korter of beter kan.
Het is een goede instelling van leerlingen als zij zich zelf kontroleren, dikwijls echter kost dit veel tijd en die moet hun dan wel gegeven worden. Leerlingen getuigen van een typisch wiskundige instelling, als zij een gevonden oplossing willen veralgemenen. Ook dit kost tijd en in de testsituatie wordt vaak meer waarde gehecht aan een groot aantal slordig verkregen oplossingen.

De betekenis van wiskundige problemen

Ten onrechte meent men dat wiskunde bij uitstek het vak is waar het oplossen van problemen – van welke aard ook – kan worden aangeleerd. Selz had hierover een nogal andere opvatting. Het lijkt me toe, dat wiskunde kan helpen om een bepaald soort problemen tot oplossing te brengen en dat ongeschikte problemen vaak ten onrechte met wiskunde aangepakt worden.
Ik hoop dat ik met dit verhaal voldoende duidelijk heb gemaakt dat ik aan de transfer of training in verband met wiskunde-problemen geen grote reikwijdte toeken.

Boekbespreking

Beutelspacher, A., *Einführung in die endliche Geometrie II, Projektive Räume*, Bibliographisches Institut Mannheim etc., B.I.-Wissenschaftsverlag, 1983, 237 p.

Dit boekje voltooit de twee-delige uitgave van deze inleiding in de eindige meetkunde. Het eerste deel werd reeds eerder in deze rubriek besproken en gaat voornamelijk over block designs en hun relatie met projectieve en affiene ruimten.
In dit tweede deel vindt de lezer een goedgeschreven inleiding tot het onderwerp der eindige meetkundes. De studie van eindige meetkundes mag zich de laatste jaren in een groeiende belangstelling verheugen. Het is dan ook waardevol dat men in dit boekje een aantal van de nieuwe ontwikkelingen in dit vakgebied aantreft. Sommige onderwerpen mist men misschien ook, bijvoorbeeld gegeneraliseerde *n*-gons, maar het is vanzelfsprekend dat de schrijver keuzen heeft moeten maken. Summier weergegeven komen de volgende onderwerpen aan de orde in de diverse hoofdstukken.

VI Karakteriseringsstellingen van projectieve en affiene ruimten, strongly resolvable designs en local projective block designs.
VII Combinatorische aspecten van eindige projectieve ruimten, ovalen, kwadratische oppervlakken, blocking sets, spreads.
VIII Möbius en Minkowski vlakken, Ovoïden, Hyperboloïden, eindige Möbius en Minkowski vlakken en deze vlakken met een even orde. Grappig is dat in dit hoofdstuk de theorie over Möbius vlakken op de linker bladzijde wordt beschreven, terwijl men op de rechter bladzijde de corresponderende theorie over Minkowski vlakken aantreft.
IX Lineaire ruimten, de stelling van De Bruijn en Erdös (i.e. $b \geq v$), het geval $b = v$ en $b = v + 1$, bijna affiene, eindige lineaire ruimten en eindige affiene ruimten.

Tenslotte vindt men aan het einde nog een aanhangsel, gewijd aan de theorie der eindige lichamen.

H. C. A. van Tilborg

Probleemoplossen, heuristieken en realistisch wiskunde-onderwijs

L. Streefland

Overzicht

De belangstelling voor probleemoplossen en heuristisch wiskunde-onderwijs neemt nog steeds toe, zowel binnen de kring van het wiskunde-onderwijs als daarbuiten. Vanuit uiteenlopende gezichtshoeken zoekt men naar theoretische fundering.
Wat zijn heuristieken? Hoe onderscheiden ze zich van algoritmen? Hoe verloopt een probleemoplossingsproces? Is dat bij een hoogbegaafde anders dan bij een normaal begaafde? Kan een heuristische aanpak geleerd worden? Dit zijn zo enkele kwesties, waarmee men zich dan bezighoudt.
In deze bijdrage wil ik me op voorhand niet in algemene theorieën verliezen doch gewoon maar eens het probleemoplossingsgedrag van kinderen observeren en kijken of we daarin enkele heuristieken kunnen aanwijzen. De observaties zijn van kinderen op uiteenlopende leeftijden in lager- en voortgezet onderwijs. Het is zeker niet de bedoeling om meer te geven dan een verkenning.

Op zoek naar heuristieken

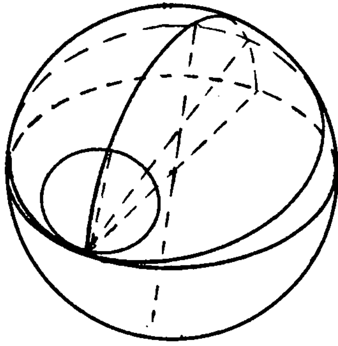
Voorbeeld 1: Graankorrels
In het thema 'Graankorrels op het Schaakbord' is de legende van de uitvinder van het schaakbord het uitgangspunt. Zijn vorst bood hem een beloning naar vrije keuze voor zijn schepping. De schaakmeester vroeg een hoeveelheid graan die men zou verkrijgen door één korrel op het eerste veld te leggen, twee korrels op het tweede veld en zo vervolgens voor elk volgend veld het aantal te verdubbelen tot en met het 64ste veld. De vorst geringschatte deze beloning op slechts een luttele zak graan. Aan de leerlingen de vraag of zij dat ook vinden? In een zesde leerjaar waar het thema werd ontwikkeld redeneerde een leerling op zeker moment in het oplossingsproces: 'Je hoeft maar tot het 32ste veld te gaan. Als je dat weet hoef je het voor het hele bord alleen nog maar te verdubbelen!'.
De leerkracht vroeg om commentaar. De groep deelde zich als vanzelf op in ondersteuners en afwijzers van de redenering, een vruchtbare en motiverende atmosfeer teweegbrengend voor een stukje onvervalst heuristisch wiskunde-onderwijs à la Lakatos (1). De gerezen tweedracht vervluchtigde als bij toverslag toen een leerling uit het kamp van de weerleggers stelde, daarbij de gezamenlijke geconstrueerde tabel van het bord benuttend:

veld nr	1	2	3	4	5	6	7
aantal korrels			$2^2 = 4$	$2^3 = 8$			

'Ik denk niet dat het goed is, want op het vierde veld – bijvoorbeeld – liggen acht korrels, de helft van vier is twee, maar op het tweede veld liggen geen vier korrels'.

Gerekend naar de wiskundige middelen die deze leerling in zijn redenering toepaste, gebeurde er nauwelijks iets verrassends. Hij maakte 'domweg' gebruik van de regelmaat in de rij in de tabel op het bord. De gevoerde redeneertrant daarentegen is wel heel belangwekkend. Die wordt gekenmerkt door *overname* van de gemaakte fout en het consequent doorredeneren daarop tot een tegenspraak is bereikt, door sterke *vereenvoudiging* en *omkering* van het probleem *terugredenering*.
Zouden hierin geen aanwijzingen kunnen schuilen omtrent belangrijke strategieën of heuristieken bij het oplossen van wiskundige problemen? Laten we nog enkele incidenten bekijken die zich in datzelfde leerjaar voordeden.

Voorbeeld 2: Tegenvoeters
Er was een misverstand gerezen over antipoden. Een leerling beweerde (figuur 1) dat twee diametraal gelegen punten op een niet noodzakelijke grote cirkel op een bol (A en A'' in de figuur) tegenvoetpunten zijn. Hij bereikte hiermee dat de groep deels partij koos, deels opponeerde. De



Figuur 1

leerkracht trachtte de tweedracht te slechten door zijn (juiste) definitie in de strijd te werpen en aan de misvatters op te leggen. Dit werkte averechts. De leerling hield vol, de groep bleef verdeeld, de leerkracht verloor het contact met een deel van de groep. Het werd van kwaad tot erger totdat een leerling opmerkte tegen vasthouder: 'Als jij gelijk had (beiden stonden voor het bord op enkele meters afstand van elkaar) zou jij ook mijn tegenvoeter kunnen zijn' en met een handgebaar liet hij de cirkel op de bol met AA'' als middellijn verder draaien tot de stand AA'''.
Opnieuw greep die verrassende eenstemmigheid om zich heen in de groep. Ieder was overtuigd. De ondersteuners van de eerste redenering hadden een nieuw uitzicht verworven, dat voor de opponenten nog eens bevestigd werd. Weer is er sprake van *overname* van de gemaakte fout en het consequent doorredeneren daarop, waarbij nu het middel van de *overdrijving* toepassing vond.

Voorbeeld 3: Optellen
De leerkracht wilde wat rekenvaardigheden oefenen met zijn klas, waaronder optellen. De groep noemde een getal van vier cijfers. Daarop 'voorspelde' de leerkracht achter op het bord de uitkomst (26409).
Op het bord kwam de som zó tot stand:

G(roep)	:	6411
G(roep)	:	5813
L(eerkracht)	:	4186
G	:	1626
L	:	8373
		——— +
		26409

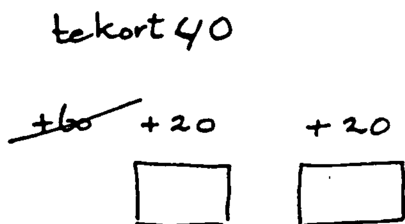
Alom verrassing toen de prognose van de leerkracht bleek te zijn uitgekomen. 'Hoe doet ie dat?' ''t Heeft natuurlijk iets met die getallen te maken!' Eén leerling hield zich op een uitdagende manier afzijdig. Hij deed niet mee! Desgevraagd kwam er als verklaring: 'Ach meneer, als u 't nu eens met getallen van één cijfer doet, dan zeg ik u wel wat erachter zit'.
De anderen waren kennelijk nog niet zover, wat zij vervolgden met het aandragen van getallen van vier cijfers. Deze verrieden overigens wel doorbrekende vermoedens, getuige keuzen als 8888, 1000, 9999.
In het voorstel van die ene leerling is opnieuw sprake van vereenvoudiging (*of overdrijving*) van het probleem om tot bepaalde inzichten te komen, die voor de probleemoplossing vereist zijn.
De vraag is nu, of we met deze voorbeelden van probleemoplossen, resp. fouten weerleggen, strategieën op het spoor zijn gekomen, die men heuristieken, zou kunnen noemen, zoals b.v. de *vereenvoudiging* of *overdrijving* van een probleem. We menen van wèl. Wat opvalt is, dat het dan vooral aankomt op de *eerste stap*, die gezet wordt op de oplossingsweg van een probleem. Dit in tegenstelling tot bepaalde psychologische probleemoplossingstheorieën, waarin men m.i. ten onrechte de zwaarte van een probleem afhankelijk stelt van het aantal oplossingsstappen (produkties genoemd) (2).
Wat aan de voorbeelden ook opvalt is, dat na de eerste stap allerlei wiskundige middelen en vaardigheden worden ingezet om het volledige karwei te klaren. De toegepaste wiskundige middelen, maar vooral de eerste stap, daarop komt het aan. Met deze vaststelling als *uitgangspunt* zullen we nog naar enkele nieuwe gevallen gaan kijken.

Heuristieken als 'eerste stap'

De vraag is dus nu, welke zijn de belangrijke strategieën, dé heuristieken, die de kwaliteit van iemands uitrusting als probleemoplosser kleuren.

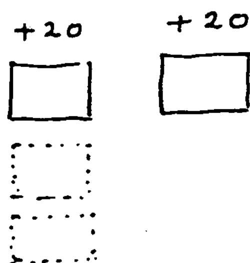
Voorbeeld 4: Melkbussen in blikwisseling
Aan Jonathan, 14 jaar, werd het volgende probleem voorgelegd (3): Van twee bussen melk bevat de ene twee keer zoveel melk als de andere. Nadat uit elk van beide bussen 20 liter is genomen bevat de ene bus drie keer zoveel melk als de andere. Hoeveel melk zat in beide bussen?

Jonathan reageerde als volgt (figuur 2)



Figuur 2

en legde daarbij uit: 'Ik werkte omgekeerd. Ik deed net of beide bussen evenveel (□) hadden. Dat gaf een tekort van 40 liter voor de eerste bus, dus in de eerste bus zat 80 liter en in de tweede 40 liter'.
Jonathan bleek over een zeer sterk visueel voorstellingsvermogen te beschikken en had vermoedelijk dit:

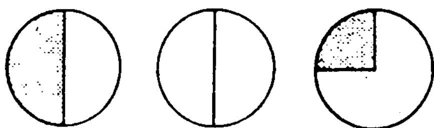


Figuur 3

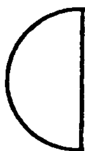
'gezien'.
Van doorslaggevende betekenis was, dat Jonathan iets van de gegevens en het gevraagde uitwisselde en uitging van een evenwichtige eindtoestand en van daaruit op grond van de overige gegevens de situatie reconstrueerde. Een dergelijke 'blikwisseling' kleurde zijn hele oplossingsproces.
Het 'geval Jonathan' had ook nog een heel interessant vervolg. 'Natuurlijk', zo verklaarde Jonathan naderhand, 'had ik het op de goede manier kunnen doen, maar dat zou veel meer tijd gekost hebben en het heeft eigenlijk niet veel zin, want ik krijg er toch geen cijfer voor'. De onderzoeker wilde weten wat hij met de 'goede manier' bedoelde. Jonathan: 'Nou, dan zou ik de hoeveelheid in de ene bus x genoemd hebben en de andere in x uitdrukken van beide 20 aftrekken en dan is de tweede hoeveelheid $\frac{1}{3}$ deel van de eerste'. Hij voegde er nog aan toe, dat hij bij zijn oplossingen op school nooit zulke visuele technieken gebruikt: 'Het is zo moeilijk uit te leggen wat ik precies doe, zonder er over te praten. Het zou tijden duren om na te denken over een geschikte manier van opschrijven wat ik allemaal in zulke plaatjes zie'.
Uit het voorgaande is zonneklaar, dat Jonathan niet alleen goed over zijn eigen oplossingshandelen heeft nagedacht, maar ook over het door de school gedicteerde oplossingshandelen. Nu er toch geen cijfer in het geding was, gaf hij duidelijk de voorkeur aan zijn eigen visuele representaties boven de variabelentaal van de wiskunde op school, een kwestie, die nadere aandacht verdient.

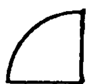
Voorbeeld 5: Een kwestie van taal
Jonathan *had* zijn oplossing voor het melkbussenprobleem als volgt kunnen verantwoorden: 'Stel dat de melk in beide bussen zó hoog stond' – demonstrerend met een gebaar van de handen – 'en dat, ...' Hij zou dan louter *demonstratieve* taal gebezigd hebben. Dit taalniveau, eigen aan veel kinderen (en volwassenen), daarvan moet je *leren* afzien.
De opgave zelf ging al een stap verder door zich in *relatieve* zin uit te drukken en te spreken van '... twee keer zoveel ...'. e.d. Jonathan verbeeldde dit op zijn manier met een figuratieve variabele, deels daadwerkelijk, deels (vermoedelijk) mentaal. Het leren omgaan met taal van dergelijk linguistisch relatief niveau vergt voor velen een leerproces en gaat dus niet zomaar vanzelf. Laat staan, dat de omzetting van het probleem in $(x - 20) = 3(\frac{1}{2}x - 20)$, d.w.z., toepassen van conventionele variabelen en symbolen in een functionele beschrijving, zomaar zou gelukken. Jonathan relativeerde het belang van dit taalniveau en volgde deze schoolweg slechts voor het cijfer.
De geschetste niveauverhoging van demonstratief via linguistisch relatief naar formeel-wiskundig in het taalgebruik is een strategie, een heuristiek, waaraan het wiskunde-onderwijs aandacht zou kunnen en moeten besteden. Niet, door zoals veelal

te doen gebruikelijk, uitsluitend de formele taal van meet af aan te brengen en af te dwingen, doch veeleer door aan te sluiten bij het informele van de beide andere niveaus en van daaruit tot constructies met conventionele symbolen en variabelen te komen.
Het kind, dat in de verdeelsituatie '3 pizza's — 4 kinderen', als volgt verdeelt:



Figuur 4

en beslist tot:
Ieder krijgt twee stukken, zo'n stuk 

en nog zo'n stuk 

, is niet geholpen met: Fout, 't moet $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ zijn, maar wel met een vraag naar naamgeving van de delen, volledig verwoord in 'ieder krijgt een halve pizza en nog een kwart pizza' om van daaruit tot constructie van een betrekking in symbolen te kunnen overgaan.

Voorbeeld 6: Kans op reflectie en vooruitgrijpen
Tijdens de ontwikkeling van het blok 'Kansrekening' binnen het HEWET-project registreerde Heleen Verhage de volgende ervaring met het vraagstuk: In een vaas zitten 9 balletjes, nl. 6 blauwe en 3 rode. Negen mensen trekken elk een balletje uit de vaas (zonder teruglegging).

a Hoeveel verschillende trekkingsresultaten zijn er mogelijk?
b Hoe groot is de kans, dat het *vierde* getrokken balletje rood is?

De wiskundige context is bepaald. Door de plaats van het vraagstuk in het aparte boekje over kansrekening, krijg je als leerling ook nog aanwijzingen over de toe te passen wiskundige middelen. Helemaal zeker ben je natuurlijk nooit. Boomdiagram of driehoek van PASCAL? ('Het staat niet voor niets in dit hoofdstuk dus het zal wel met de driehoek van Pascal moeten!'). Eén van de boomdiagramtobbers had al een aantal mogelijke trekkingsuitkomsten uitgeschreven. Het vermoeden bestond, dat het korter moest kunnen. De betrokken leerlingen vonden ook wel, dat hun methode bewerkelijk was, maar gingen er toch mee door, overwegende: 'Als we het nu zó doen, kunnen we kijken wat eruit komt en aan de hand daarvan proberen een kortere oplossing te vinden'.
Deze leerlingen kwamen in feite in conflict met zichzelf. Ze voelden aan, dat de *lokale* werkzaamheden aan de probleemoplossing, nl. het uit de hand lopend vertakken van het boomdiagram, op gespannen voet stond met het *globale* vermoeden, dat er een kortere oplossingsweg moest bestaan. Dit *reflecteren* op de eigen oplossingsweg, het afwijzen ervan en het desondanks erin volharden om aldus *vooruit te grijpen* op een elegantere oplossing zijn eveneens kenmerkend voor iemands wiskundige attitude (4). Jonathan van de melkbussen vertoonde vergelijkbaar gedrag.
Maar ... om welke heuristiek gaat het nu? Er is geen sprake meer van een duidelijke eerste stap, of toch wel, het kiezen van een schematiseringsvorm, ingegeven door de (wiskundige) context van het boekje. Maar geen heuristiek als een blikwisseling, een probleemvereenvoudiging of overdrijving.
Schieten we ons doel niet voorbij? Neen, ... het zal nog erger worden.

Om welke wiskunde gaat het eigenlijk?

In echte, realistische problemen en toepassingen ontbreken de aanwijzingen over de wiskundige context en de te gebruiken wiskundige werktuigen zoals in het laatste voorbeeld, althans dat zou zo moeten zijn.
Wat er dan zoal kan gebeuren toont

Voorbeeld 7: Bestuur buiten wiskundige context
Een jongen, van 9 jaar, krijgt het volgende probleem onder ogen: Een jongensclub plaatst zich onder een vijfkoppig bestuur. Uit die vijf worden een voorzitter en een penningmeester (vanwege de clubkas) gekozen.
Op hoeveel verschillende manieren kan uit het bestuur van vijf jongens een voorzitter met pen-

ningmeester worden gekozen?
Na een lichte aarzeling somt de jongen op:'Met iene-miene-mutte, (duim omhoog), een getal onder de tien (wijsvinger erbij), drie-jongens-op-een-rij met vijf vuisten, één met een steentje erin en de vijf jongens kiezen een vuist . . .'
De reactie van de jongen beantwoordde niet aan de bedoelingen van de vragensteller. We houden het er nu maar op, dat hij de *juiste wiskundige context niet vatte*, hoewel hierover nog veel meer te zeggen zou zijn, bijvoorbeeld over de misvormde wiskundige verwachtingen van de vragensteller. Bij toepassingsgericht, realistisch wiskunde-onderwijs is dit een heuristiek van eminent belang. Deze heuristiek kleurt de grensoverschrijding van realiteit naar wiskunde, de eerste schrede in het mathematiseringsproces (5). Evenwel, beginnen de contouren van wat aanvankelijk heuristieken genoemd werden niet allengs te vervagen? Worden ze niet te ijl, te ongrijpbaar, te ivoren-torenhoog om nog met recht en rede over te spreken?

Besluit

De 'eerste klap' blijkt ook bij het probleemoplossen zijn spreekwoordelijke waarde te behouden. Blikwisseling, vereenvoudiging, overdrijving dienen zich aan als duidelijke en herkenbare probleemtransformaties. De strategie van de verhoging van taalniveau's was dit eveneens.
Bij de taalkwestie drongen zich als vanzelf wat denkbeelden op over een betere uitlijning van leerprocessen in het onderwijs, meer afgestemd op de taalniveau's van de leerlingen. Naarmate we vorderden konden de vermeende heuristieken die we zagen, minder eenvoudig geprofileerd worden. Wat te denken van 'reflectie op het eigen oplossingshandelen' of het 'vatten van de juiste wiskundige context'? Bij de laatste heuristiek hadden we vooral buiten de wiskunde gestelde problemen op het oog, realistische toepassingsgebieden. Wat is de zin ervan? Wel, in ons land wordt wel psychologisch onderzoek verricht met het oog op verhoging van de toepasbaarheid van de geleerde wiskunde. Optimaliseren noemt men zoiets.

Aan een leerproces op grond van bestaand materiaal voegt men het leren van heuristieken toe, zijnde notaties, representaties en wat dies meer zij. Op grond van de voorbeelden menen we te mogen stellen, dat zo het paard achter de wagen gespannen wordt. Niet alleen omdat een weloverwogen bezinning op een analyse van het gekozen materiaal achterwege gelaten wordt, waardoor de vraag hoe een deelleergang er zou moeten uitzien, die mikt op heuristisch problemen oplossen en geleerde wiskunde toepassen onbeantwoord blijft. (Niemand zal willen bestrijden dat het realiseren van dergelijke doelen sterk afhankelijk is van de kwaliteit van de gebruikte deelleergang). Maar ook, omdat onze voorbeelden uitwijzen, dat de onderscheiden heuristieken sterk gebonden zijn aan degene die ze uitvindt. Wil heuristisch wiskunde-onderwijs dus echt een kans krijgen dan zal dit ruimte moeten scheppen voor persoonlijke voorkeuren en inzichten van de leerlingen en daarbij moeten aansluiten.
Krutetskii stelde in onderzoek vast, dat de instelling van kinderen – zeg hun voorkeuren – uiteen kunnen lopen van meetkundig tot sterk analytisch (6). Alleen om deze reden al is het hier bepleite wiskunde-onderwijs dus gewenst. En zoiets lukt stellig niet met gesloten, regelgericht, rigide wiskunde-onderwijs.

Literatuur

1 Lakatos, J., '*Proofs and Refutations. The logic of mathematical discovery*', Cambridge, London, New York, Melbourne 1976.
2 Anderson, J. R., '*The Architecture of Cognition*', Cambridge, London, 1983.
3 Sinkinson, A., '*Methods Used by More Able Pupils*', Mathematics Teaching 101, 1982, 44-48.
4 Freudenthal, H., '*Weeding and Sowing*', Dordrecht, Boston, 1978.
5 Treffers, A., '*Wiskobas Doelgericht*', Utrecht, 1978.
6 Krutetskii, V. A., '*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*', Chicago, 1976.

Examen vwo Wiskunde A 1985, 1e periode

1 Een fabrikant van tuinbenodigdheden brengt bouwpakketten op de markt voor schuurtjes (S), tuinhuisjes (T) en plantenkassen (P). De benodigde hoeveelheid houten planken in m^2, glas in m^2 en arbeid in uren voor elk van de drie artikelen is af te lezen uit de matrix A.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{hout} & \text{glas} & \text{arbeid} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 8 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} S \\ T \\ P \end{matrix} \end{array}$$

De kosten van grondstoffen en arbeid in guldens per eenheid zijn af te lezen uit de kolom-matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{hout} \\ \text{glas} \\ \text{arbeid} \end{matrix}$$

De bestelde aantallen bouwpakketten S, T en P zijn af te lezen uit de rij-matrix C:

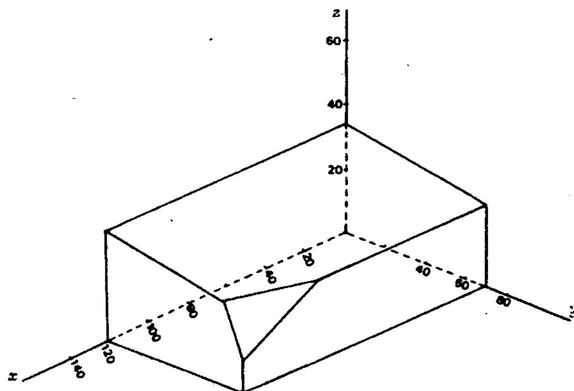
$$\begin{array}{rccc} & \text{S} & \text{T} & \text{P} \\ C = & (120 & 70 & 50) \end{array}$$

a Bereken het matrixprodukt CAB.
Wat is de betekenis hiervan?
De fabrikant heeft $2200\,m^2$ hout, $510\,m^2$ glas en 850 uren arbeid tot zijn beschikking. Hij is niet in staat deze hoeveelheden aan te vullen.

b Onderzoek of deze hoeveelheden voldoende zijn om aan de vraag volgens de matrix C te kunnen voldoen.
Vanwege de hoge voorraadkosten wil de fabrikant niet meer bouwpakketten produceren dan er besteld zijn. De aantallen bouwpakketten S, T en P stelt hij achtereenvolgens x, y en z.

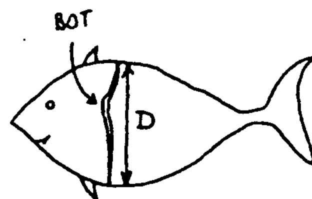
c De variabelen x, y en z moeten behalve aan de drie voorwaarden $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ en $z \geqq 0$ nog aan zes voorwaarden voldoen.
Stel deze zes voorwaarden op.
In onderstaande figuur is het toegestane gebied bij de voorwaarden van vraag c getekend. Dit gebied wordt begrensd door zeven vlakken.

d Bij welke twee van de negen voorwaarden in c bedoeld, vind je geen grensvlak in de tekening? Verklaar waarom deze twee voorwaarden geen rol spelen.



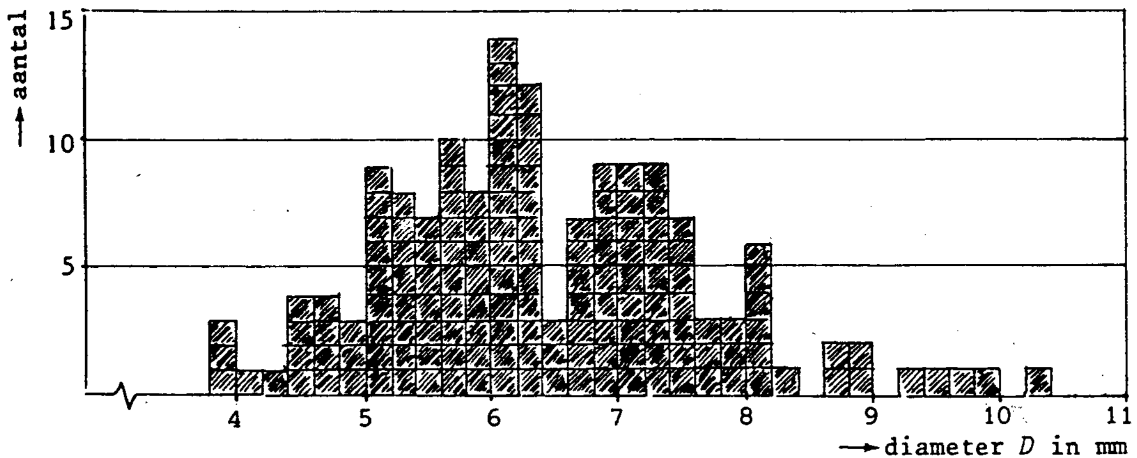
De winst op een bouwpakket S, T en P is achtereenvolgens ƒ65,–, ƒ130,– en ƒ140,–.

e Welke aantallen bouwpakketten S, T en P moet de fabrikant produceren om een zo groot mogelijke winst te maken?
Bereken die maximale winst.



2 Bij oudheidkundige opgravingen in het Caraïbisch gebied, waar rond 1200 n. C. de Lucayan indianen leefden, werd een groot aantal botresten van vissen opgegraven. Na nauwkeurige bestudering van de botten nam men aan de resten van 150 vissen gevonden te hebben. Met behulp van een bepaald type bot (zie figuur) werd de diameter D van zo'n vis geschat.

Zo werd de volgende verdeling van diameters gevonden:



a Verwerk deze gegevens in een grafiek op normaal waarschijnlijkheidspapier. Maak daarbij een nieuwe klasse-indeling met een klassebreedte van 1 mm, te beginnen met de klasse waarvan de grenzen zijn 3 en 4.
Schat uit deze grafiek het gemiddelde en de standaarddeviatie van de verdeling van D.
Aan de hand van de diameter werd een schatting gemaakt van het gewicht van een vis. Daarbij ging men uit van het verband $G = 15D^2$, waarbij G = gewicht in g en D = diameter in mm.

b Bereken het aantal vissen met een gewicht van ten hoogste 960 g.

c In een archeologisch artikel werd het verband tussen G en D gegeven door de formule: $\log G = 2 \cdot \log D + 1{,}18$.
Toon aan dat deze formule bij benadering gelijkwaardig is met de formule $G = 15D^2$.

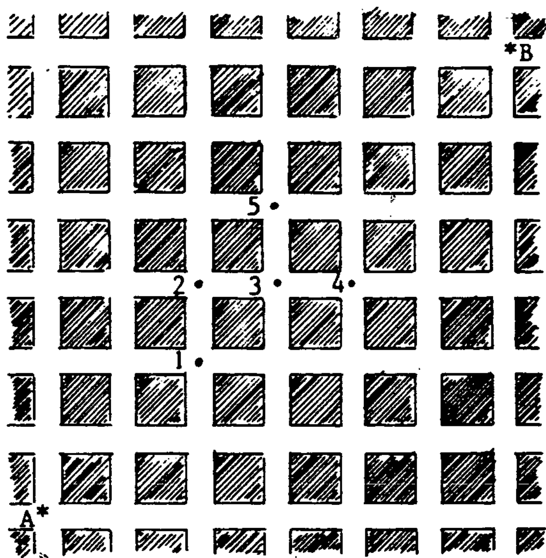
d Iemand beweert dat het gemiddelde gewicht van de vissen kan worden berekend door in de formule $G = 15D^2$ voor D de gemiddelde diameter in te vullen; de zo verkregen waarde van G is dan het gemiddelde gewicht. Onderzoek of deze bewering juist is.
Als het bot dat kenmerkend is voor de diameter van de vis niet gevonden wordt, gebruikt men het totale gewicht van de botresten van een vis om het skeletgewicht te schatten. Het lichaamsgewicht van de vis wordt dan gevonden via de formule $G = 10^{1,5} \cdot S^{0,8}$, waarbij S = skeletgewicht in g en G = lichaamsgewicht in g.

e Van een vis wordt het skeletgewicht geschat op 80 g.
Bereken in één decimaal nauwkeurig de diameter van die vis.

f Een van de onderzoekers heeft een nauwkeurige grafiek gemaakt van G als functie van S.
Bereken in één decimaal nauwkeurig de helling van die grafiek in het punt met $S = 50$.

g Het skeletgewicht S kan worden uitgedrukt in de diameter D met behulp van de formule $\log S = a \log D + b$.
Bereken a en b in één decimaal nauwkeurig.

3 De figuur hieronder toont de plattegrond van een stadswijk.



a Een inspecteur van politie belast met verkeerscontrole, gaat van post A naar post B en zorgt ervoor dat hij de vijf drukke kruispunten 1, 2, 3, 4 en 5 elk precies één keer en in deze volgorde aandoet. Hij volgt daarbij een zo kort mogelijke weg.
Uit hoeveel verschillende routes kan hij kiezen?
Een verkeersagent krijgt de opdracht om op de kruispunten 1, 2, 3, 4 en 5 dienst te doen. Op elk kruispunt oefent hij zijn dienst tenminste één uur uit. Aan het einde van zo'n uur stelt hij vast op welk kruispunt hij het eerstvolgende dienstuur zal zijn. Dat kan òf een naburig kruispunt òf hetzelfde kruispunt zijn. Om te voorkomen dat hij volgens een vast patroon zijn aandacht over de vijf kruispunten verdeelt, laat hij zijn keus door het toeval bepalen; daarbij heeft elk van de mogelijkheden evenveel kans. Als hij bijvoorbeeld een uur op punt 2 is geweest, dan heeft hij de kans $\frac{1}{3}$ om het volgende uur op punt 3, $\frac{1}{3}$ om op punt 1 en $\frac{1}{3}$ om weer op punt 2 te zijn.

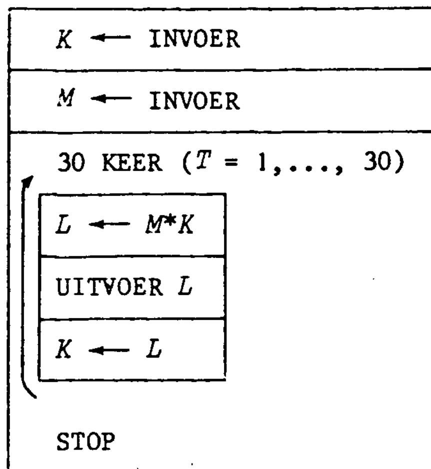
b Om 10.00 uur gaat de agent naar kruispunt 5.
Hoe groot is de kans dat hij van 12.00 tot 13.00 uur op punt 3 zijn dienst uitoefent?
De elementen van de matrix M zijn de overgangskansen bij de vijf kruispunten.

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \text{ naar} \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

c Bereken het element in de tweede rij en de tweede kolom van de matrix M^2.
Wat is de betekenis van dit getal voor de verkeersagent?

d De matrix M heeft de eigenschap dat de som van de getallen in elke kolom gelijk is aan 1. Beredeneer, zonder de matrix M^2 te berekenen, dat M^2 dezelfde eigenschap heeft.
De computer van het bureau van verkeerspolitie heeft een berekening uitgevoerd zoals beschreven in onderstaand structuurdiagram. Daarbij is voor K de kolommatrix met op de eerste plaats 1 en op de andere vier plaatsen 0 ingevoerd; M is de gegeven 5 bij 5 matrix en M^*K is het matrixprodukt van M en K.



T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	T = 5	T = 27	T = 28	T = 29	T = 30
.500	.417	.347	.303	.268	.154	.154	.154	.154
.500	.417	.389	.348	.322	.231	.231	.231	.231
.000	.167	.181	.216	.236	.308	.308	.308	.308
.000	.000	.042	.066	.087	.154	.154	.154	.154
.000	.000	.042	.066	.087	.154	.154	.154	.154

Hierboven is een gedeelte van de output afgedrukt. De eindkolommen van deze output zijn onafhankelijk van het kruispunt waar een agent op de eerste dag zijn dienst begint.

e Een verkeersagent met een 40-urige werkweek vervult gedurende 13 weken de dienst op de kruispunten 1, 2, 3, 4 en 5. Hoeveel uur van deze periode zal hij naar verwachting op elk van die kruispunten aanwezig zijn?

f De agent heeft in de genoemde periode 100 verkeersovertredingen waargenomen. In 74 van die gevallen was de betrokken chauffeur een man, in 26 gevallen een vrouw. Uit verkeerspeilingen in die wijk is bekend dat 64 % van de auto's door een man wordt bestuurd. Neem aan dat de steekproef van 100 overtredingen aselect is. Ga na of men op grond van deze gegevens de conclusie kan trekken dat in deze stadswijk mannelijke chauffeurs naar verhouding vaker een verkeersovertreding maken dan vrouwelijke chauffeurs. Neem een significantieniveau van $2\frac{1}{2}$ %.

Examen vwo Wiskunde B 1985, 1e periode

De opgaven 1, 3 en 4 zijn identiek aan die van het wiskunde I-examen.

Opgave 2:

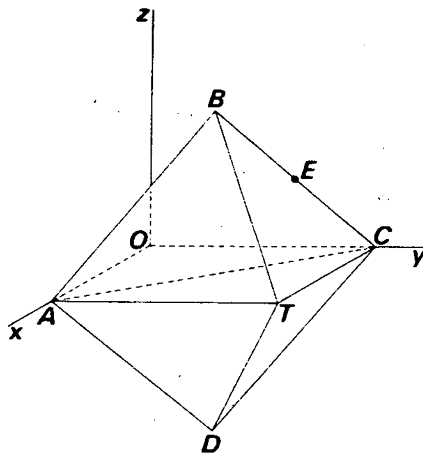
Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $A(12, 0, 0)$, $C(0, 12, 0)$ en $T(12, 12, 0)$.

Deze punten zijn hoekpunten van een regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ met top T.

Het punt E is het midden van de ribbe BC.

a Teken in bijgevoegde ruimtefiguur de doorsnede van de piramide en het vlak met vergelijking $y = 8$. Geef een korte toelichting bij de tekening. Bereken de oppervlakte van deze doorsnede.

b De lijn AE snijdt het vlak met vergelijking $y = 8$ in het punt S. Bereken de coördinaten van S.



c Op de ribbe BT ligt een punt F zo dat de som van de lengten van de lijnstukken AF en EF minimaal is. Bereken $BF : FT$. Bereken $AF + FE$.

Wiskunde toepassingen in de economie

L. R. J. Westermann

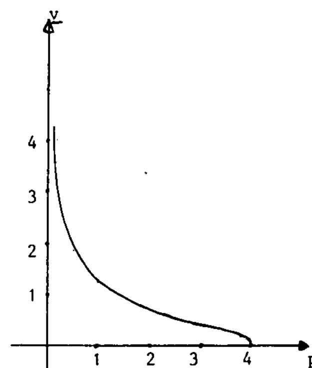
De belangstelling voor toepassingen van de wiskunde is in de laatste tijd sterk toegenomen. Die beweging stopt uiteraard niet bij de deur van de school. Daarvan getuigt wel de invoering van wiskunde A. In de economie zijn het gebruik en de toepassing van wiskunde weliswaar geen nieuw verschijnsel, maar ook hier is sprake van een enorme vlucht gedurende de laatste decennia.
Momenteel kiezen grote aantallen leerlingen voor de studie economie of econometrie. Zij worden tijdens die studie met vele concepten geconfronteerd die sterk wiskundige aspecten vertonen. Dit artikel stelt bij wijze van voorbeeld zo'n begrip aan de orde en met name enkele wiskundige aspecten ervan.
Het is nadrukkelijk niet de bedoeling direct voor wiskunde A bruikbare schoolstof aan te bieden. Het gaat er slechts om enig beeld te geven van het functioneren van de wiskunde bij genoemde vervolgstudies. Dat lijkt wel relevant voor wiskunde A te zijn. Hopelijk bezit het ook enige informatieve waarde voor wiskundeleraren op het vwo.

Inleiding

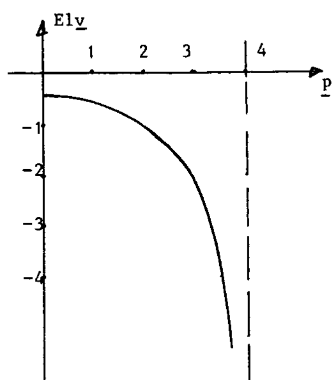
Beschouw bij wijze van voorbeeld de functie $v = \sqrt{\frac{2}{p} - \frac{1}{2}}$, $0 < p \leqq 4$. Men kan deze als een *vraagfunctie* opvatten; p stelt de prijs per eenheid van een bepaald verbruikersgoed voor, terwijl $v = v(p)$ het aantal eenheden is dat van dat goed bij de gegeven prijs p door de verbruikers wordt gevraagd.
Hoe verandert nu de vraag en daarbij tevens de mogelijke afzet, indien de prijs wordt gewijzigd? $v'(p)$ is een maat voor die verandering. Feitelijk zijn wij natuurlijk meer geïnteresseerd in *relatieve* veranderingen. Met welk percentage verandert de vraag als de prijs met $r\%$ wordt gewijzigd? Het antwoord is niet moeilijk te geven. Kies de prijswijziging h zo dat $100r = \frac{h}{p} = \frac{(p+h)-p}{p}$; let wel dat h positief maar ook negatief kan zijn. Deze verandering gaat gepaard met een relatieve vraagverandering die gelijk is aan $\frac{v(p+h)-v(p)}{v(p)}$; dit moet met 100 worden vermenigvuldigd om de percentuele vraagverandering te krijgen. Het quotiënt

$$\left[\frac{v(p+h)-v(p)}{v(p)}\right] \Big/ \left[\frac{(p+h)-p}{p}\right] \qquad (1)$$

wordt de *gemiddelde prijselasticiteit* van de vraag over het prijstraject van p naar $p + h$ genoemd.
In theoretische beschouwingen is de *(punt)-elasticitieit* van v in p een veelgebruikt begrip. Dat is niets anders dan de limiet van (1) voor $h \to 0$. Deze is dus $v'(p) \cdot \frac{p}{v(p)}$. Bij $v(p) = \sqrt{\frac{2}{p} - \frac{1}{2}}$ wordt dat $\frac{2}{p-4}$, $0 < p < 4$.



Figuur 1a De vraagfunctie $v(p) = \sqrt{\frac{2}{p} - \frac{1}{2}}$



Figuur 1b *De elasticiteit van* $v(p)$, $\mathrm{El}\,v(p) = \frac{2}{p-4}$

Definitie: Voor een differentieerbare $f: D \subset (0, \infty) \to (0, \infty)$ is *de elasticiteit van f in x* gelijk aan

$$\mathrm{El}f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)},\ x \in D \qquad (2)$$

Prijselasticiteiten van de vraag zijn in het algemeen negatief, die van het aanbod positief. Als de relatieve verandering van vraag of aanbod achterblijft bij de relatieve prijsverandering, dan noemt men vraag respectievelijk het aanbod *inelastisch*. Dan is dus $|\mathrm{El}f(x)| < 1$. Als $|\mathrm{El}f(x)| > 1$ dan heet f *elastisch* in x.
De prijs wordt ook vaak opgevat als functie van de vraag. Deze functie $p = p(v)$ is de inverse van eerder genoemde $v(p)$. Als deze tenminste bestaat. In termen van de functie $p(v)$ is de prijselasticiteit van de vraag, die wij gemakshalve nu met ε aanduiden, gelijk aan

$$\varepsilon = \frac{p(v)}{vp'(v)} \qquad (3)$$

Interpretaties, voorbeelden, toepassingen

1 $\mathrm{El}\,v(p)$ is de verhouding van de *marginale vraag* $v'(p)$ en de *gemiddelde vraag* $\frac{v}{p}$.

2 Een belangrijke eigenschap is dat de elasticiteit (2) *onafhankelijk* is van de *eenheden* waarin x en $f(x)$ worden gemeten. Dat is evident omdat $\mathrm{El}f$ (de limiet van) het quotiënt van de relatieve veranderingen is. Het kan echter ook formeel uit (2) worden afgeleid. Andere eenheden voor x betekent dat x moet worden vervangen door $u = \alpha x$; andere eenheden voor f betekent vervanging van f door $g = \beta f$. Nu is $g(u) = \beta f\left(\frac{u}{a}\right)$. Rechtstreekse berekening leert dat

$$\mathrm{El}\,g(u) = \mathrm{El}f(x)$$

3 $\mathrm{El}f(x)$ kan worden opgevat als de *gewone afgeleide van de functie* $F(x) = \ln(f(x))$ naar $\ln(x)$. Er geldt immers

$$\frac{\mathrm{d}[\ln(f(x))]}{\mathrm{d}[\ln x]} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}[\ln x]} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{1/x} = \mathrm{El}f(x) \qquad (4)$$

4 *Constante elasticiteit* is een voorwerp van veel economische beschouwingen. De functies $y = f(x)$ van constante elasticiteit zijn te vinden door de differentiaalvergelijking $\frac{xy'}{y} = \alpha$ op te lossen. Op grond van (4) kan worden gezegd dat zo'n f een logarithme heeft die een lineaire functie van $\ln x$ is. Beide wegen leiden snel tot

$$f(x) = Cx^{\alpha} \qquad (5)$$

als *de functies van constante elasticiteit* α.

5 Laten wij nogmaals het verband tussen vraag en prijs beschouwen, in de vorm $p = p(v)$. De totale opbrengst bij de consumptie v is

$$F(v) = p(v) \cdot v \qquad (6)$$

De *marginale opbrengst* is

$$\frac{dF(v)}{dv} = p(v) + p'(v) \cdot v = p(v) \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (7)$$

Deze kunnen wij interpreteren als de meeropbrengst per eenheid vraagtoename. Als $\varepsilon < -1$ dan is $\frac{dF}{dv} > 0$. Terwijl de marginale opbrengst negatief is indien $-1 < \varepsilon < 0$. Dit laatste betekent dat bij verder toenemende afzet de totale opbrengst daalt. Dit kan, van de aanbiederskant bekeken, een overweging zijn om *door te draaien*. In het geval dat $\varepsilon = -1$ verandert de geldopbrengst bij toenemende afzet niet.

6 Nu is het begrip elasticiteit beslist niet beperkt tot prijselasticiteit van vraag of aanbod. Wij noemen enkele andere. De elasticiteit van de winst met betrekking tot de reclame-uitgaven; de inkomenselasticiteit van de consumptie; de elasticiteit van de vraag naar boter met betrekking tot de prijs van margarine. Dit laatste behoeft enige toelichting. De vraag v_1 naar boter zal afhangen van de prijs p_1 van boter maar ook van de prijs p_2 van margarine, zoals ook de vraag v_2 naar margarine afhangt van p_1 en van p_2. De vier elasticiteiten van v_1 en v_2 naar p_1 respectievelijk p_2 heten *partiële elasticiteiten*. Daarvan zijn de *kruiselasticiteiten*

$$\mathrm{El}_2 v_1 = \frac{p_2 \cdot \dfrac{\partial v_1}{\partial p_2}}{v_1} \text{ en } \mathrm{El}_1 v_2 = \frac{p_1 \cdot \dfrac{\partial v_2}{\partial p_1}}{v_2} \qquad (8)$$

in het bijzonder interessant. In het voorbeeld

$$\begin{cases} v_1 = 4 - 3p_1 + \sqrt{p_2} \\ v_2 = 7 + 2\sqrt{p_1} - 2p_2 \end{cases}$$

zijn in $(1, 4)$ de kruiselasticiteiten

$$\mathrm{El}_2 v_1 = \frac{4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4}}}{3} = \frac{1}{3} \text{ en } \mathrm{El}_1 v_2 = \frac{1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1}}}{1} = 1.$$

7 Enige afzonderlijke aandacht vragen elasticiteiten van de produktie. Een *produktiefunctie* geeft de 'output' (produktie) als functie van de 'inputs' (produktiemiddelen of produktiefactoren) weer. Een geliefd economisch thema is de produktie z (> 0) als functie van de ingezette arbeid (personeel) x (> 0) en het ingezette kapitaal (machines) y (> 0):

$$z = f(x, y) \qquad (9)$$

Bekend is de zogenaamde *Cobb-Douglas produktiefunctie*. Deze is van het type

$$z = Cx^{\alpha}y^{\beta}, \qquad (10)$$

De elasticiteiten van de produktie met betrekking tot de arbeid respectievelijk het kapitaal zijn constant

$$\mathrm{El}_1 z = \alpha, \mathrm{El}_2 z = \beta \qquad (11)$$

8 Ietwat gecompliceerder is het begrip *substitutie-elasticiteit*. Beschouw nogmaals de produktiefunctie (9). Wij maken enkele wel aannemelijke veronderstellingen vooraf. f zal tweemaal continu-differentieerbaar zijn en bovendien *homogeen*; verder is $f'_1 > 0, f'_2 > 0$, dat wil zeggen de marginale produktiviteiten van arbeid en kapitaal zijn positief Substitutie in dit verband betreft vraag in hoeverre bij een gegeven produktie omvang z = constant = C de ene produktiefactor door de andere is te vervangen. Beschouw daarom de niveaukromme of *isoquant* Γ bepaald door

$$f(x, y) = C \qquad (12)$$

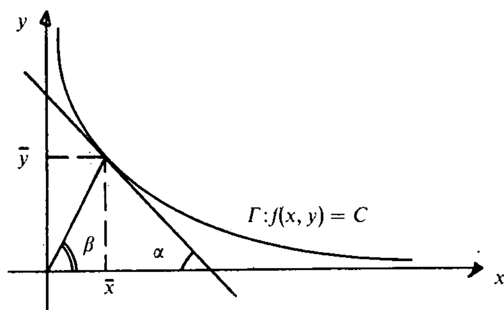
In de omgeving van een punt (x, y) dat aan (12) voldoet is (12) op grond van de impliciete functiestelling op te vatten als een functie

$$y = \varphi(x) \qquad (13)$$

Onder de *substitutievoet* van y voor x verstaan wij $s = -\frac{dy}{dx} = +f'_1/f'_2$. Aangenomen is dat f homogeen is, zeg van de graad p. Dat wil zeggen dat $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y), \forall \lambda > 0, x > 0, y > 0$. Gemakkelijk volgt nu dat $f'_i(x, y) = x^{p-1} f'_i\left(1, \frac{y}{x}\right)$. De substitutievoet s is daarom een functie van de ratio

$r = \frac{y}{x}$, namelijk

$$s = g(r) = \frac{f_1'(1,r)}{f_2(1,r)} \qquad (14)$$



Figuur 2 $s = \tan\alpha$, $r = \tan\beta$

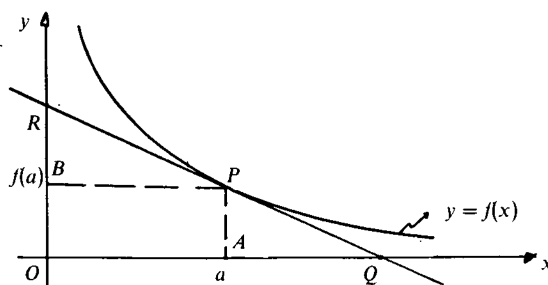
Een belangrijke economische karakteristiek van een produktiefunctie is de substitutie-elasticiteit. Dat is de relatieve verandering in de produktiefactor-verhouding r per eenheid verandering in de substitutievoet.
Indien $g' = (f_2'f_{12}'' - f_1'f_{22}'')/(f_2')^2 \neq 0$, dan heeft g een inverse functie $r = h(s) = g(s)$.
σ is dus de elasticiteit van h. Om precies te zijn noemen wij $\bar{r} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, $\bar{s} = f_1'(1,\bar{r})/f_2'(1,\bar{r})$. De *substitutie-elasticiteit van y voor x* in $(\bar{x}, \bar{y})$ is dan, zoals na enig rekenwerk blijkt,

$$\sigma = h'(\bar{s}) \cdot \frac{\bar{s}}{h(\bar{s})} = \frac{1}{\bar{r}} = \left[\frac{f_1' \cdot f_2'}{f_2'f_{12}'' - f_1'f_{22}''}\right]_{(1,\bar{r})} \qquad (15)$$

Bij de Cobb-Douglas functie (10) is $\sigma = 1$. Bij de produktiefunctie $f(x, y) = [ax^\alpha + bx^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$, $a > 0$, $b > 0$, is $\sigma = \frac{1}{1-\alpha}$. Deze functie is er één uit de klasse van C(onstant) E(lasticity of) S(ubstitution)-functies. In het genoemde geval is $s = \frac{a}{b}r^{1-\alpha}$.

9 Indien wij beschikken over een (betrouwbare) grafische voorstelling van $y = f(x)$ dan is *grafisch* op eenvoudige wijze El$f(a)$ te bepalen. Zie figuur 3. Aangenomen wordt dat ook de raaklijn in P: $(a, f(a))$ correct is getekend (zie ook punt 11). Daar is het geval van een dalende, strikt convexe f getekend ($f' < 0, f'' > 0$).

$$\text{El}f(a) = \frac{a \cdot f'(a)}{f(a)} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{-OR}{OQ} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{-OB}{AQ}.$$



Figuur 3 $\text{El}f(a) = \frac{a}{f(a)}f'(a)$

Dus

$$\text{El}f(a) = -\frac{OA}{AQ}\left(= -\frac{OB}{BR} = -\frac{PQ}{RP}\right) \qquad (16)$$

10 De *empirische* bepaling van elasticiteiten op basis van waarnemingen is een lastig en omstreden probleem. Gaat het bijvoorbeeld om een vraagfunctie $v = v(p)$, dan dient uit waarneming van een serie paren (p_i, v_i) $i = 1, 2, ..., k$ een schatting van de functie v te worden gemaakt. Daartoe moet eerst een aanname (op theoretische gronden) worden gedaan over de aard van v. Bijvoorbeeld v is een lineaire functie ($v(p) = ap + b$) of v is een functie van constante elasticiteit ($v(p) = Cp^\alpha$).
De wiskundige statistiek kent vele methoden om uit de (p_i, v_i) schattingen af te leiden voor a, b respectievelijk C, α.
Daarbij moet ook nog rekening worden gehouden met onzekerheden zowel met betrekking tot de waarnemingen als tot de specificatie. Wij kunnen daar hier niet op ingaan. Zie bijvoorbeeld [2].
Als gedacht wordt aan een functie van constante elasticiteit dan kan in aansluiting op de punten 3 en 4 het volgende worden opgemerkt. Met behulp van de data $(\ln p_i, \ln v_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, zou men het *lineaire* verband tussen $\ln v$ en $\ln p$ kunnen schatten. De bijbehorende helling is de gezochte elasticiteit.

11 Het gebruik van elasticiteiten is niet voorbehouden aan de economie. Bij beschouwingen over stabiliteit en gevoeligheid van rekenprocedures komt het begrip met name in de numerieke wiskunde voor; het wordt wel aangeduid met *conditiegetal*. Met $y = f(x)$ kan bijvoorbeeld worden beschreven hoe het resultaat y van een procedure afhangt van de gebruikte startwaarde x.
Van belang is dan natuurlijk te weten hoe een relatieve verandering van x doorwerkt in de relatieve verandering van het resultaat y. De verhoudingsfactor van die veranderingen is juist $\mathrm{El}f(x)$.
Een heel eenvoudig voorbeeld bestaat in een toepassing op de bepaling van de ... elasticiteit! Zie punt 9 en figuur 3. Voor de hand ligt de vraag wat het effect is van een niet correct getekende raaklijn. Neem aan dat a en $f(a)$ vast zijn. De partiële elasticiteit van $\mathrm{El}f(a)$ met betrekking tot $f'(a)$ is 1. De (totale) elasticiteit van $\mathrm{El}f(a)$ met betrekking tot a is

$$1 + a\frac{f''(a)}{f'(a)} - a\frac{f'(a)}{f(a)} \qquad (17)$$

Hier is overigens niet voldaan aan de (gemakkelijk te verruimen) eisen bij (2) dat de onafhankelijk veranderlijke en de functie postief zijn.

Literatuur

1 Allen, R. G. D., *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan, 1969.
2 Cramer, J. S., *Empirical econometrics*, North-Holland, 1969.
3 Hartog, E., *Hoofdlijnen van de prijstheorie*, Stenfert Kroese, 1979.
4 Westermann, L. R. J., *Wiskunde voor de studie economie*, Wolters-Noordhoff, 1984.

Mededelingen

Eindredacteur

De heer Auke Oosten is met ingang van de komende jaargang benoemd tot eindredacteur van *Euclides*.
Met deze benoeming heeft de redactie iemand met een aanzienlijke ervaring binnen kunnen halen; Auke is onder andere 8 jaar redacteur van Pythagoras geweest.

Frans Dolmans

Goed gedaan

In Euclides van november 1984 stond op bladzijde 140 onder de titel Wiskunde = denken mijn oproep over wiskundeonderwijs niet te laten verwoorden tot een verzameling Pavlov-reacties.
In Euclides van maart 1985 staat op bladzijde 273 en 274 een brief van o.a. het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren aan de staatssecretaris waarin duidelijk stelling wordt genomen tegen examens in objectief scoorbare vorm. Hulde voor deze stellingname. Jammer, dat de kleine lettertjes waarmee de brief is afgedrukt suggereren dat hij thuis hoort in de categorie hobbyisme.

Gijs Piret

Jaarvergadering

De jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zal dit jaar worden gehouden op zaterdag 26 oktober 1985 van 10.00 h tot 17.00 h in het gebouw van de SOL te Utrecht.
De studiedag wordt verzorgd door de Didaktiekkommissie van de N.V.v.W. Meer uitgebreide informatie en een uitnodiging aan de leden volgt in Euclides jaargang 61, nr 1 en/of 2.

Vlaamse Wiskunde Olympiade

Vanaf het schooljaar 1985-1986 is Vlaanderen een nieuw initiatief rijker: De Vlaamse Wiskunde Olympiade.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1985	
22 t/m 26 juli:	conferentie IGPME, Noordwijkerhout
28 aug:	bestuursvergadering te Utrecht van de NVvW
vr 13 sep:	tweede ronde Ned. Wisk. Olympiade
18 sep:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
21 sep:	gemeenschappelijke bestuursvergadering van de VVWL en de NVvW te Amersfoort
26 okt	jaarvergadering van de NVvW te Utrecht
1986	
11-16 aug:	ICOTS II, Victoria BC, Canada

Inhoud

Adressen van auteurs

P. M. van Hiele, p/a A. van Streun, RU Groningen, Postbus 800, 9700 AV Groningen

L. Streefland, p/a OC&OW, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht

J. K. Timmer, Karel Gerardstraat 7, 7552 GT Hengelo

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

L. R. J. Westermann, p/a RU Groningen, Postbus 800, 9700 AV Groningen